THEORIE DU RISQUE

Xavier Milhaud

ENSAE ParisTech

Mars-Avril 2016

Plan du cours

Un peu de bibliographie

[1] *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes* (2004); Mikosch T.

[2] *Mathématiques de l'assurance non-vie Vol. I et II* (2005); Denuit M. & Charpentier A.

[3] *Stochastic process for insurance & finance* (2008); Rolski & al.

[4] *Modern Actuarial Risk Theory Using R* (2008); Kaas R. & al.

[5] *Risk Theory* (1984); Beard R, Pentikainen R & Pesonen E.

[6] *Mathematical Methods in Risk Theory* (1970); Buhlmann H.

[7] *Non Life Insurance Mathematics* (1988); Straub E.

[8] *An Introduction to Mathematical Risk Theory* (1979); Gerber H.

1. Introduction

Une police d’assurance est un contrat entre deux parties :

→ l’assuré, détenteur du contrat;

→ l’assureur, pourvoyeur du contrat.

En échange de la couverture d’un risque par l’assureur, l’assuré verse une **prime** d’assurance.

En cas de sinistre, le bénéficiaire du contrat reçoit le montant contractuel prévu en cas de survenance du sinistre.

Ainsi le risque économique initialement supporté par l’assuré est transféré vers l’assureur.

La mutualisation induite par la souscription de nombreux contrats au sein d’une compagnie d’assurance permet l’utilisation grossière de la **loi des grands nombres**.

En effet,

- $\rightarrow$ un portefeuille d’assurance couvre un risque en particulier: les pertes sont considérées être de même loi de probabilité;
- $\rightarrow$ les contrats sont a priori indépendants les uns des autres.

Ces propriétés doivent permettre à l’assureur de prédire avec une précision relative les pertes encourues pour une période donnée.

Soit un portefeuille d'assurance contenant n polices. Notons la loi du i$^{\text{ème}}$ sinistre S_i (perte), et la loi des pertes agrégées S.

La LFGN stipule la CV presque sûre de la moyenne empirique de pertes i.i.d., notée $\bar{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$, vers l'espérance de la loi:

$$\boxed{\bar{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[S_i] = \mu.}$$

Ou encore: $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \mu\right) = 1.$

Ce résultat est à l'origine du **principe général de tarification**: la prime vaut au moins μ, aussi appelée prime pure du contrat.

En pratique l'assureur applique des **chargements** à cette prime, car mathématiquement sa ruine est certaine à horizon infini dès lors que la tarification respecte le strict principe d'équivalence.

La prime d'assurance se décompose donc en plusieurs parties:

$\longrightarrow$ la prime pure;

$\longrightarrow$ les chargements techniques (ou marge de risque *MR*):

$$\Pi(S) = \mathbb{E}[S] + MR(S);$$

$\longrightarrow$ les coûts:

- acquisition,
- administration et gestion du contrat,
- rémunération d'intermédiaires (courtiers, ...).

La stratégie de la compagnie peut également jouer sur la hauteur de ces chargements.

Objectif de l'assureur:

bien choisir son principe de prime pour la tarification.

Cela lui permettra de déterminer

$\longrightarrow$ la loi de probabilité de son résultat futur,

$\longrightarrow$ sa probabilité de ruine.

2 Quelques distributions classiques en assurance

Introduction

Nous donnons dans cette partie les principales lois utilisées en mathématique de l'assurance.

Distribution de fréquence	Lois de sévérité
Loi de Poisson	Loi Gamma
Loi binomiale	Loi de Weibull
Loi binomiale négative	Loi de Pareto
Loi géométrique	Loi lognormale

Le but est d'en présenter les principales caractéristiques.

2 Quelques distributions classiques en assurance

- Distribution de fréquence de sinistre
- Distribution de sévérité (coût) de sinistre

Distribution de Poisson

La fonction de masse de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ s'écrit pour une v.a. N prenant ses valeurs dans l'ensemble des entiers positifs:

$$\boxed{\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}} \qquad \lambda > 0.$$

Les deux premiers moments de cette loi sont donnés par

$$\mathbb{E}[N] = \lambda \qquad Var(N) = \lambda \qquad M_N(t) = e^{\lambda}(e^t - 1)$$

Rq: équidispersion. λ est le taux de sinistralité par unité de temps de couverture du risque.

Preuve.

Proposition

La famille des v.a.r. Poisson composées est fermée sous convolution.

Soient S_1, ..., S_n des Poisson composées indépendantes de paramètres λ_j et de f.d.r. des sinistres F_j (pour $i = 1, ..., n$); alors $S = S_1 + ... + S_n$ est une Poisson composée de paramètres

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad \text{et} \qquad F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x).$$

Preuve. Les f.g.m. des S_j valent $M_{S_j}(t) = e^{\lambda_j(M_j(t)-1)}$.

$$\text{Donc} \quad M_S(t) = e^{\lambda(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda}(M_j(t)-1))} = e^{\lambda(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)-1)},$$

distribution Poisson composée des paramètres évoqués en sus.

Loi Binomiale: expériences de Bernouilli répétées

Elle est à valeurs dans $\{0, ..., n\}$. La fonction de masse de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ s'écrit pour une v.a. N :

$$\boxed{\mathbb{P}(N = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k}} \qquad p \in [0, 1].$$

Les deux premiers moments de cette loi sont donnés par

$$\mathbb{E}[N] = n\,p \qquad\qquad Var(N) = n\,p\,(1 - p)$$

Les réalisations d'une binomiale sont sous-dispersées ($\mathbb{E}[N] > Var(N)$).

Cas de surdispersion: la loi binomiale négative

Elle peut être construite comme un mélange de lois de Poisson:

$$(N \,|\, \Lambda = \lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \Lambda \sim \mathcal{G}a(\alpha, \delta).$$

La densité jointe de N (discret) et Λ (cont.) vaut $(\lambda, \alpha, \delta > 0, k \in \mathbb{N})$

Remarques:

- $\longrightarrow$ La queue de distribution est plus épaisse que celle d'une loi de Poisson.
- $\longrightarrow$ Sa variance est plus grande qu'une loi de Poisson: loi utilisée en cas de surdispersion des observations.

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N \mid \Lambda]] = \mathbb{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\delta}$$

$$Var(N) = Var(\mathbb{E}[N \mid \Lambda]) + \mathbb{E}[Var(N \mid \Lambda)] = \frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha q}{p^2}$$

$$\begin{aligned} M_N(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) e^{tn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)\, n!} p^{\alpha} (qe^t)^n \\ &= \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)\, n!} (1 - qe^t)^{\alpha} (qe^t)^n = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

La loi géométrique

La distribution géométrique se caractérise par

$$\boxed{\mathbb{P}(N = k) = q^k(1 - q)} \qquad 0 < q < 1.$$

La f.g.m. est égale à

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)e^{tn} = (1 - q)\sum_{n=0}^{\infty}(qe^t)^n = \frac{1 - q}{1 - qe^t}.$$

On peut facilement déduire de cette expression les deux premiers moments.

Le modèle de comptage Zero-Inflated (ZIP)

On utilise ce modèle mélange lorsque l'on étudie des contrats qui couvrent un risque dont la survenance est plutôt rare...
C'est typiquement le cas par exemple lorsque l'assureur opère sur

- le marché des catastrophes naturelles,
- le marché du luxe (assurance contre le vol), ...

Les 0 observés viennent de la loi de comptage $+$ masse en 0:

- regroupés dans un dirac regroupant les deux “sources” de 0,
- l'autre composante regoupe les obs. $\neq 0$ provenant de la loi de comptage.

$$\boxed{f_{\text{zeroinfl}}(k) = f_{\text{zero}}(0)\,\mathbb{1}_{\{k=0\}} + (1 - f_{\text{zero}}(0))\,f_{\text{count}}(k)}$$

Les modèles type “hurdle” (ex: Zero Truncated Poisson)

On l’utilise lorsque l’on étudie des données de sinistres dont une grande proportion est nulle.

La $\neq$ est que les 0 ne viennent plus du tout de la loi de comptage,

- mais entièrement d’une composante spécifique,
- à laquelle on ajoute une loi de comptage tronquée.

$$\boxed{f_{\text{hurdle}}(k) = \begin{cases} f_{\text{zero}}(0) & \text{si } k = 0, \\ (1 - f_{\text{zero}}(0)) \dfrac{f_{\text{count}}(k)}{1 - f_{\text{count}}(0)} & \text{si } k > 0. \end{cases}}$$

Ex. Poisson : $\quad \mathbb{P}(N = k) = \begin{cases} \pi_0 & \text{si } k = 0, \\ (1 - \pi_0) \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(1 - e^{-\lambda})k!} & \text{si } k > 0. \end{cases}$

Plus généralement, les mélanges finis

L'idée est de supposer le paramètre de la loi considérée comme aléatoire: augmente ainsi la variabilité des observations de la loi.

De manière tout à fait générale, la nouvelle densité pour une v.a. X de densité $f(x;\theta)$ s'écrit ainsi

$$f(x;H) = \int f(x;\theta)dH(\theta),$$

où H est la distribution a priori du paramètre.

Certains mélanges (Poisson-Gamma, Beta-Binomial...) sont plus utilisés car ils ont de bonne propriétés (bayésienne...).

2 Quelques distributions classiques en assurance

- Distribution de fréquence de sinistre
- Distribution de sévérité (coût) de sinistre

La distribution Gamma

La loi Gamma $\mathcal{G}a(\alpha, \delta)$ d'un sinistre Y admet pour densité

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\delta^\alpha \, y^{\alpha-1} \, e^{-\delta y}}{\Gamma(\alpha)}} \qquad y > 0.$$

Les caractéristiques de cette loi sont les suivantes:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \int_0^\infty e^{ty} \delta^\alpha \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\delta y} \, dy \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta - t}\right)^\alpha \int_0^\infty (\delta - t)^\alpha \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\delta-t)y} \, dy = \left(\frac{\delta}{\delta - t}\right)^\alpha \end{aligned}$$

On en déduit: $\qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{\alpha}{\delta} \qquad Var(Y) = \frac{\alpha}{\delta^2}.$

$\rightarrow$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$;

$\rightarrow$ si $Y_1 \sim \mathcal{G}a(\alpha_1, \delta)$ et $Y_2 \sim \mathcal{G}a(\alpha_2, \delta)$ sont indépendantes, alors

$$Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{G}a(\alpha_1 + \alpha_2, \delta).$$

$\rightarrow$ si $\alpha = 1$ alors la distribution est exponentielle.

La vitesse de décroissance de la queue de distribution est un élément central de la distribution de Y (ex: tarification d'EoL).

On distingue alors

$\rightarrow$ la vitesse exponentielle: $\mathbb{P}(Y > y) = e^{-\lambda y}$

$\rightarrow$ la vitesse hyperbolique: $\mathbb{P}(Y > y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + y}\right)^{\alpha}$

La distribution de Weibull

Cette loi a l'avantage d'être très flexible. La densité de la loi de Weibull, notée $Wei(c, \gamma)$, a la forme

$$\boxed{f_Y(y) = c\,\gamma\,y^{\gamma-1}\,\exp(-cy^\gamma)} \qquad y > 0,\ c > 0,\ \gamma > 0.$$

On peut aussi donner la f.d.r. qui vaut $F_Y(y) = 1 - \exp(-cy^\gamma)$.

D'autre part, la queue de distribution est de la forme $\exp(-cy^\gamma)$:

- $\rightarrow$ $\gamma = 1$: décroissance de type exponentielle;
- $\rightarrow$ $\gamma < 1$: décroissance + lente qu'exponentielle;
- $\rightarrow$ $\gamma > 1$: décroissance + rapide qu'exponentielle (gaussienne).

Remarque: $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[Y^k]$ souvent difficiles à calculer.

Dans la pratique,

$\longrightarrow$ pour des modèles de sinistres, on prend souvent $\gamma < 1$;

$\longrightarrow$ les queues de distribution de Y sont

- plus épaisses que celles de la loi exponentielle,
- plus fines qu'avec la loi de Pareto;

$\longrightarrow$ cette loi sert surtout en analyse de survie;

$\longrightarrow$ les moments sont polynomiaux au lieu d'être exponentiels.

La distribution de Pareto

Nous décrivons ci-dessous la densité caractéristique de la loi de Pareto, notée $Pa(\alpha, \lambda)$, pour une v.a.p. Y:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + y)^{\alpha+1}}} \qquad \alpha > 0.$$

Il en découle que sa f.d.r. vaut $\quad F_Y(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + y}\right)^\alpha.$

On a notamment $\quad \mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \qquad Var(Y) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Rq: le $k^{\text{ième}}$ moment de la distribution de Pareto existe $\Leftrightarrow \alpha > k$.

La distribution Lognormale

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = e^X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

La densité de Y est donnée par

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Ses premiers moments s'obtiennent à partir de la transformée de Laplace de la gaussienne:

$$\mathbb{E}[Y^t] = \mathbb{E}[e^{Xt}] = e^{t\mu + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}.$$

La famille de distributions Tweedie

$\rightarrow$ Souvent utilisée en actuariat comme réponse d'un GLM.
En l'écrivant sous forme exponentielle, la densité est donnée par

$$f(x;\mu,\phi) = a(x,\phi)\ \exp\left(\frac{1}{\phi}\Big[x\theta(\mu) - \kappa(\theta(\mu))\Big]\right),$$

$$\theta(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu^{1-p}}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ \log\mu & \text{si } p = 1 \end{cases} \qquad \kappa(\theta(\mu)) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-p}}{2-p} & \text{si } p \neq 2 \\ \log\mu & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

Dans cette formalisation, $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $Var(X) = \psi\mu^p = \psi\mathbb{E}[X]^p$, avec ψ un parametre de dispersion > 0.

L'ordre $p \in \mathbb{R}^+$ (appelé *paramètre d'indice*), choisi (en fonction de l'application) avant d'estimer μ et ϕ, définit le type de distribution:

- $\rightarrow$ $p < 0$: réalisations dans $\mathbb{R}$; $\quad p = 0$: loi gaussienne,
- $\rightarrow$ $0 < p < 1$: pas de distribution (pas de modèle Tweedie),
- $\rightarrow$ $p = 1$ avec $\phi = 1$: loi de Poisson,
- $\rightarrow$ $1 < p < 2$: loi composée Poisson-Gamma (réalisations ≥ 0),
- $\rightarrow$ $p = 2$: loi Gamma,
- $\rightarrow$ $2 < p < 3$ ou $p > 3$: positive stable distributions ($x > 0$),
- $\rightarrow$ $p = 3$: loi inverse gaussienne.

En pratique, $1 < p < 2$ très utile lorsque l'on observe bc de 0 ds les coûts de sinistres, venant de la masse en 0 de la loi de comptage.

3 Modèle individuel et modèle collectif en assurance

3. Modèle individuel et modèle collectif en assurance
   - Les différentes approches
   - Le modèle de risque individuel (MRI)
   - Le modèle de risque collectif (MRC)
   - Choix des rétentions et priorités en réassurance

Introduction

Objectif:

modéliser le montant agrégé des sinistres d'un portefeuille de polices d'assurance sur une période de temps fixée.

- $\longrightarrow$ C'est un sujet central des mathématiques de l'assurance car la distribution de ce montant est rarement connue.
- $\longrightarrow$ Les méthodes numériques et les progrès de l'informatique permettent alors souvent d'approximer cette distribution.
- $\longrightarrow$ On s'intéresse particulièrement en queue de distribution.

Il existe $\neq$ approches pour modéliser le coût d'un sinistre Y.

Approche indemnitaire

Idée: coûts dépendent de l'occurrence éventuelle d'un sinistre (**au plus un sinistre dans la période**) et du montant qui en résulte.

$$\boxed{Y = \begin{cases} b & \text{si } I = 1 \\ 0 & \text{si } I = 0 \end{cases}}$$

où $I \sim$ Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ (occurrence du sinistre), et b déterministe.

$\rightarrow$ $\mathbb{E}[Y] =$

$\rightarrow$ $Var(Y) =$

Exemple: coût en sinistre d'un contrat d'assurance vie sur un an.

Approche forfaitaire

Idée: Y est définie par 2 composantes. Une **masse en 0**, et une **composante continue** pour le coût si un sinistre survient.

$$\boxed{Y = \begin{cases} B & \text{si } I = 1, \\ 0 & \text{si } I = 0 \end{cases}}$$

où $I \sim$ Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ (occurrence du sinistre), et $B \perp\!\!\!\perp I$.

- $\rightarrow$ $\mathbb{E}[Y] =$, $Var(Y) =$
- $\rightarrow$ $F_Y(y) =$
- $\rightarrow$ $M_Y(t) =$

Exemple: le coût en sinistres pour le contrat santé i sur un an.

Approche fréquence-sévérité: le + souvent en IARD

Idée: Y est fonction de 2 v.a., M et B_j, respectivement le nombre de sinistres et les montants associés.

$$\boxed{Y = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j & \text{si } M > 0, \\ 0 & \text{si } M = 0 \end{cases}}$$

où M est une v.a. discrète, M **et** B_j **sont** $\perp\!\!\!\perp$ **et les** B_j **sont i.i.d**.

→ $\mathbb{E}[Y] =$, $Var(Y) =$

→ $M_Y(t) =$

→ $F_Y(y) =$

Exemple: coût pour le contrat d'assurance IARD i sur un an.

Lien des approches avec modèles individuel / collectif

1. Le modèle individuel: le portefeuille est considéré comme un groupe de risques individuels et hétérogènes.

   Initialement apparu en assurance vie où les probabilités de décès et les capitaux sous risque sont ≠ pour chaque individu;

2. Le modèle collectif: le portefeuille est considéré comme un groupe de risques homogènes.

   L'élément majeur est le nombre aléatoire de sinistres N.
   Ce modèle apparait en 1903 dans la thèse de Lundberg, le précurseur de la théorie du risque en assurance.

Les principales différences entre ces deux modèles sont

→ modèle individuel: un seul sinistre pour chaque police;

→ modèle collectif: montants des sinistres individuels sont i.i.d.

Nous verrons ici comment

→ calculer les principales caractéristiques de la distribution agrégée dans chacune des deux approches: moments, fonction génératrice des moments (f.g.m.), distribution...

→ approcher le modèle individuel par le collectif;

→ comprendre l'impact de la réassurance selon le modèle.

3. Modèle individuel et modèle collectif en assurance
   - Les différentes approches
   - Le modèle de risque individuel (MRI)
   - Le modèle de risque collectif (MRC)
   - Choix des rétentions et priorités en réassurance

Le modèle de risque individuel

Soit un portefeuille d'assurance de n polices.

On note dans la suite Y_j le montant du sinistre de la j$^{\text{éme}}$ police.

En général, cette v.a. Y_j a une forte probabilité de prendre la valeur 0 en assurance.

Le montant agrégé des sinistres du portefeuille est noté

$$\boxed{S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j.}$$

Hypothèses du MRI

L'application du modèle individuel requiert les hyp. suivantes:

- → Y_1, Y_2, ..., Y_n sont des v.a. indépendantes;
- → le nombre de polices dans le portefeuille ne change pas au cours de la période de couverture;
- → les Y_j peuvent avoir des distributions différentes;
- → pour la $j^{\text{ème}}$ police, le nombre N_j de sinistre $\in \{0; 1\}$:

$$\mathbb{P}(N_j = 1) = q_j \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(N_j = 0) = 1 - q_j.$$

Exemple

Le décès avec une probabilité annuelle q_x pour un assuré d'âge x.

Les premiers moments du montant agrégé S

Supposons que le montant du sinistre de la j[ème] police est déterministe, noté μ_j (capital décès), alors

$$Y_j = \mu_j N_j.$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[Y_j] = \sum_{j=1}^{n} q_j \mu_j.$$

Le fait que les risques soient indépendants permet d'écrire que

$$Var(S) = \sum_{j=1}^{n} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{n} q_j(1 - q_j)\mu_j^2.$$

Généralisation: le montant B_j du sinistre de la j$^{\text{ème}}$ police est stochastique et indépendant de N_j:

$$Y_j = B_j N_j.$$

Posons $\mathbb{E}[B_j] = \mu_j$ et $Var(B_j) = \sigma_j$:

i) Méthode 1: grâce à l'indépendance entre N_j et B_j,

ii) Méthode 2: grâce au conditionnement et à l'indépendance, et

FGM ou transformée de Laplace de S

La fonction génératrice des moments (ou transformée de Laplace) d'une v.a. S est définie par

$$M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}].$$

Permet de retrouver le moment d'ordre k !

Ici, on a donc

$$M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[e^{t\sum_{j=1}^{n} Y_j}] = \mathbb{E}[e^{t\sum_{j=1}^{n} N_j B_j}] = M_{Y_1}(t)...M_{Y_n}(t),$$

$$
\begin{aligned}
\text{Or} \qquad M_{Y_j}(t) &= \mathbb{E}\Big[e^{tY_j}\Big] = \mathbb{E}\Big[e^{t(N_jB_j)}\Big] = \mathbb{E}_{N_j}\Big[\mathbb{E}[e^{t\,N_jB_j}|N_j]\Big] \\
&= q_j\mathbb{E}[e^{t\,N_jB_j}|N_j=1] + (1-q_j)\mathbb{E}[e^{t\,N_jB_j}|N_j=0] \\
&= q_j\mathbb{E}[e^{t\,B_j}] + (1-q_j) \\
&= 1 + q_j\Big(M_{B_j}(t) - 1\Big)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
M_{N_j}(t) &= \mathbb{E}\Big[e^{tN_j}\Big] \\
&= \mathbb{P}(N_j = 1) \times e^{t.1} + \mathbb{P}(N_j = 0) \times e^0 \\
&= q_je^t + (1-q_j) = 1 + q_j(e^t - 1).
\end{aligned}
$$

Donc on remarque que $M_{Y_j}(t) = M_{N_j}(\ln M_{B_j}(t))$. On a donc les moments de S; quant à sa distribution, c'est plus compliqué...

Approximation de la loi de S par une loi normale

Le montant agrégé S est une somme dont le nombre de termes

- $\longrightarrow$ est déterministe (n),
- $\longrightarrow$ est suffisamment grand pour envisager l'usage de résultats asymptotiques.

Ceci nous amène à introduire le théorème de Lindeberg.

- $\longrightarrow$ Généralisation du théorème central-limite.
- $\longrightarrow$ Valable sous certaines conditions.
- $\longrightarrow$ Ce théorème va nous permettre d'approximer la loi de S.

Théorème de Lindeberg (généralisation du TCL):

Theorem

Soient $(Y_k)_{k=1,...,n}$ *des v.a. indépendantes, de moyennes* μ_k *et de variances* σ_k^2*. Posons*

$$S_n = Y_1 + ... + Y_n, \qquad m_n = \mu_1 + ... + \mu_n, \qquad s_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2$$

Si $\forall \eta > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k^2 \, \mathbb{1}_{\{|Y_k| > \eta s_n\}}] = 0$$

Alors

$$\frac{S_n - m_n}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarques:

$\rightarrow$ si les Y_k sont de même loi, alors $m_n = n\mu$ et $s_n^2 = n\sigma^2$, et par convergence dominée

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big[Y_k^2\,\mathbb{1}_{\{|Y_k|>\eta s_n\}}\Big] = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathbb{E}\Big[Y_1^2\,\mathbb{1}_{\{|Y_1|>\eta\sqrt{n}\sigma\}}\Big]\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\rightarrow$ si les Y_k sont uniformément bornées (ex: binomiales) et si $\liminf_{i\geq 1}\sigma_i^2 > 0$, alors la condition du théorème est vérifiée.

$\rightarrow$ si les Y_k sont des lois Gamma $\mathcal{G}(\gamma_k, c)$, et si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k$ existe, alors la condition est également vérifiée.

Exemple: (cas de lois binomiales, car somme de Bernouilli).

Considérons un portefeuille de polices d'assurance décès avec

- $\rightarrow$ 500 "jeunes" assurés de probabilité de décès dans l'année de 0,01 avec un capital décès de 100 000 euros;
- $\rightarrow$ 80 "vieux" assurés de probabilité de décès dans l'année de 0,025 avec un capital décès de 160 000 euros.

Dans le modèle individuel, on aurait $S = Y_1 + ... + Y_n$ avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_j = 100000) &= 0,01 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq 500 \\ \mathbb{P}(Y_j = 160000) &= 0,025 \quad \text{pour } 501 \leq j \leq 580. \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}[S] =$
et $Var(S) =$

- Calibrons une loi avec les mêmes moments que celle de S, i.e.

$$S \sim \mathcal{N}(8,2 \times 10^5, (3,15 \times 10^5)^2),$$

et vérifions que $\mathbb{P}(S < 0)$ est petite avec cette approximation.

- Par exemple en utilisant le théorème de Lindeberg,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 10^6) &\simeq \\ &\simeq \end{aligned}$$

où Φ est la f.d.r. de la loi normale centrée réduite.

D'autres techniques d'approximation peuvent être utilisées à partir des moments de S, que nous verrons plus loin.

L’approche modèle collectif

Le modèle collectif considère le montant total des sinistres d’un portefeuille composé de plusieurs polices homogènes.

Une police peut donner lieu à plusieurs sinistres.

Si les Y_j sont les montants des sinistres individuels; et N est le nombre total de sinistres pour tout le portefeuille;
Alors le montant agrégé S du portefeuille vaut

$$\boxed{S = Y_1 + ... + Y_N = \sum_{j=1}^{N} Y_j.}$$

Hypothèses et remarques sur le MRC

L'application du modèle collectif requiert les hyp. suivantes:

- $\rightarrow$ les montants des sinistres Y_1, Y_2, ..., Y_N sont des v.a. i.i.d.;
- $\rightarrow$ le nombre de sinistres N est indépendant des Y_j.

Remarques:

- \+ l'indépendance entre les sinistres est contestable pour certaines branches d'assurance dans lesquelles les sinistres sont provoqués par un même fait générateur (ex: tempêtes);

- \+ l'hypothèse "identiquement distribués" pour les sinistres peut être remise en cause sur de longues périodes (effet par exemple des facteurs d'actualisation, de l'inflation...)

+ on peut douter de l'indépendance entre nombre et montant des sinistres.

  Par exemple en assurance auto: la fréquence des sinistres en zone rurale est faible, alors que la sévérité (coût) est plus élevée (et inversement en zone urbaine). Il faut segmenter les populations pour recomposer des classes homogènes.

+ les sinistres ont des distributions continues ou discrètes: dans la réalité, elles sont continues; mais dans la pratique on les considère parfois discrètes pour les approximer.

+ N est toujours une v.a. de comptage, donc discrète.
+ on considèrera souvent que N n'est pas borné. Une hyp. classique est de considérer que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Les moments de la distribution agrégée S

La technique de calcul des moments de S est basée sur le conditionnement par rapport au nombre de sinistres.

Rappelons que les Y_i sont

- $\rightarrow$ i.i.d.;
- $\rightarrow$ de moyenne m;
- $\rightarrow$ de variance σ^2

En utilisant la formule de l'espérance conditionnelle,

$$\boxed{\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}[S \mid N]].}$$

Calcul de la f.g.m. de S

Comme précédemment, on utilise l'espérance conditionnelle :

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left[e^{tS}\right] = \mathbb{E}_N\left[\mathbb{E}_{S\,|\,N}[e^{tS}\,|\,N]\right].$$

Pour $N = n$, on obtient

Distribution du montant agrégé S

Posons $T_n = Y_1 + ... + Y_n$. Par convention $T_0 = 0$.
On note F_Y^{*n} la n[ième] convolée de la loi F_Y telle que $T_n \sim F_Y^{*n}$.

Dans le modèle collectif, la f.d.r. de la distribution composée vaut

$$F_S(s) = \mathbb{P}(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}(T_n \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\, F_Y^{*n}(s).$$

Rappelons que si les Y_j admettent une densité f_Y, les densités des convolées s'obtiennent par récurrence:

$$f_Y^{*n}(s) = \int_0^s f_Y(s-y)\, f_Y^{*(n-1)}(y)\, dy = \int_0^s f_Y^{*(n-1)}(s-y)\, f_Y(y)\, dy.$$

En effet,

Parfois, on peut calculer cette fonction de répartition F_S. Sinon,

1. on peut calculer la f.g.m. que l'on inverse par des algorithmes numériques (FFT);
2. on utilise des méthodes exactes pour déterminer F_S;
3. enfin, on a recours à des techniques d'approximation (Normal, Gamma translatée, ...).

Les méthodes exactes

En général, la complexité pour déterminer la distribution de S dépend principalement des complexités des lois de N et Y_j.

Cas particuliers:

1. F_Y est dégénérée: le montant du sinistre n'a qu'une valeur:

$$\mathbb{P}(Y = c) = 1, \qquad c > 0.$$

   Alors, S prend uniquement des valeurs de type: 0, c, 2c, ...

   Il est facile de calculer les probabilités exactes ici puisque $\mathbb{P}(S = kc) = \mathbb{P}(N = k)$: la distribution de S a une forme identique à celle de N, mais concentrée sur d'autres points.

2. Si on a des distributions “sympas”: ex. $N \sim \mathcal{G}(q)$, $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$,

S a donc une distribution qui est un mélange entre un dirac en 0 et une loi $\mathcal{E}xp(\lambda(1-q))$.

Remarque:

on aurait aussi pu calculer la f.g.m. et en déduire la loi en la reconnaissant:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_N(\ln M_Y(t)) = \frac{1-q}{1-qM_Y(t)} \\ &= \frac{1-q}{1-q\frac{\lambda}{\lambda-t}} = (1-q) + q\,\frac{\lambda(1-q)}{\lambda(1-q)-t}. \end{aligned}$$

On reconnait ainsi ladite f.g.m. !

Cas général: on utilise l'algorithme de Panjer.

Relation récursive permettant l'évaluation de la fonction de masse associée à une loi composée:

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} Y_j & \text{si N} > 0 \\ 0 & \text{si N = 0} \end{cases}$$

Notations:
$p_N(k) = \mathbb{P}(N = k), \quad p_Y(k) = \mathbb{P}(Y_j = k), \quad p_S(k) = \mathbb{P}(S = k).$

Hypothèses de l'algorithme:

$\rightarrow$ N et les Y_j sont des v.a. à valeurs entières,

$\rightarrow$ les Y_j sont indépendantes de N, les Y_j sont i.i.d.

La loi de N est discrète et doit appartenir à la **famille de Panjer**:

$$\exists a < 1,\ b \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_N(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_N(k-1).$$

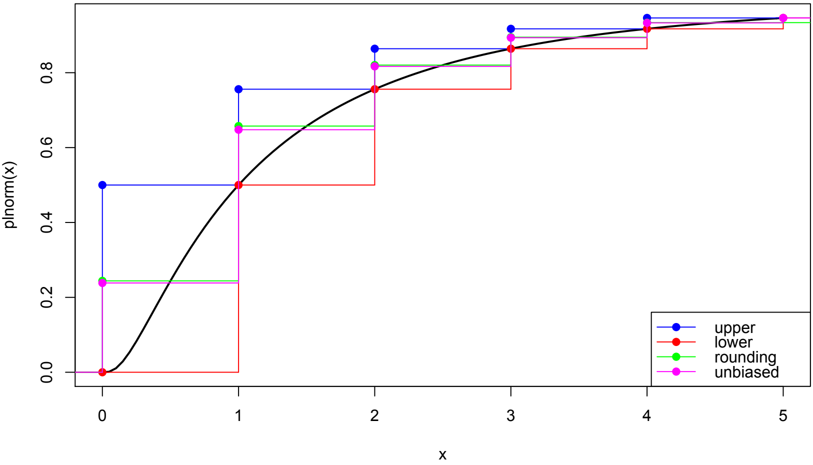
$\longrightarrow$ Les lois classiques qui appartiennent à cette famille sont $\mathcal{P}(\lambda)$ ($a = 0$ et $b = \lambda$); $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{NB}(r, p)$.

$\longrightarrow$ La loi de S obtenue est discrète.

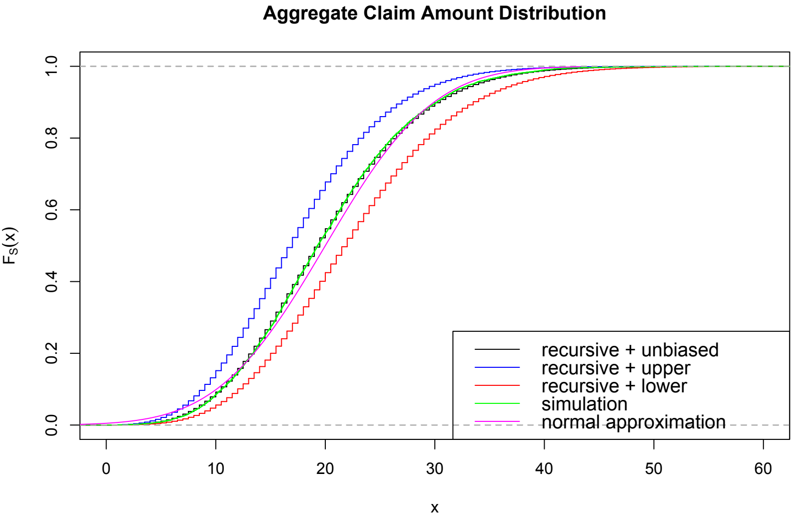
$$\boxed{\mathbb{P}(S = j) = \begin{cases} p_N(0) & \text{si } p_Y(0) = 0 \qquad j = 0 \\ M_N(\ln p_Y(0)) & \text{si } p_Y(0) > 0 \qquad j = 0, \\ \dfrac{1}{1 - a p_Y(0)} \sum_{k=1}^{j} \left(a + \frac{bk}{j}\right) p_Y(k)\, p_S(j-k) & \forall j \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

Preuve.

Méthodes de discrétisation de la loi du montant



Visualisation de la distribution agrégée



Avantages et inconvénients de l'algorithme de Panjer

+ Technique de calcul très générale.
+ Simplicité de mise en oeuvre de par l'algorithme.
+ Fournit une approximation très précise de la distribution de la sinistralité.

- Nécessite une discrétisation préalable.
- Nécessite que la loi de fréquence appartienne à la famille de Panjer.
- Temps de calcul si le pas de discrétisation est très fin.

Les méthodes approchées

a) Approximation avec la loi Normale.

On calcule la moyenne et la variance du montant agrégé S.
Si le nb aléatoire de sinistres N est suffisamment grand, le TCL fournit une approx. de la distribution de S par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où

$$\mu = \mathbb{E}[S] \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = Var(S).$$

Mais il y a des limites à ce résultat:

$\rightarrow$ Dans la réalité, S a une distribution concentrée sur $[0, \infty[$: $\mathbb{P}(S < 0) = 0$. C'est en contradiction avec la gaussienne!

$$\text{Approx. mauvaise} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(S < 0) \text{ grande}.$$

$\rightarrow$ la densité gaussienne est symétrique et CV vite vers 0.

Or la plupart des distributions en assurance sont très asymétriques et ont des queues de distributions épaisses.

Par exemple, le *coefficient d'asymétrie* (skewness) d'une Poisson composée vaut

$$Skew(S) = \frac{\mathbb{E}[Y_j^3]}{(\mathbb{E}[Y_j^2])^{3/2}} \frac{1}{\lambda^{1/2}},$$

Remarque: si λ devient grand, la distribution de S devient de plus en plus symétrique! (on retombe sur le TCL)

b) Approximation avec la loi Gamma translatée.

Quand l'approximation normale est insuffisante, on a recours à d'autres distributions. La loi Gamma

- $\rightarrow$ est à support positif,
- $\rightarrow$ a une distribution asymétrique.

Mais elle peut être insuffisante pour décrire le comportement de queue... D'où la loi Gamma translatée d'une constante k:

$$\boxed{\text{si} \quad S^{'} \sim Ga(\alpha, \delta) \quad \text{alors} \quad S = S^{'} + k \sim TGa(\alpha, \delta, k).}$$

Objectif: calculer les 3 premiers moments empiriques de S, puis égaliser moyenne, variance et skewness de la loi Gamma translatée à ceux de S.

La densité de la loi $TGa(\alpha, \delta, k)$ est donnée par

$$f_S(s) = \frac{\delta^\alpha (s-k)^{\alpha-1} e^{-\delta(s-k)}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad s \geq k.$$

Ses premiers moments sont

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\alpha}{\delta} + k \qquad Var(S) = \frac{\alpha}{\delta^2} \qquad Skew(S) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

On calcule leurs équivalents empiriques, puis on résoud le système en inversant les relations:

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{2}{Skew(S)}\right)^2 \quad \delta = \frac{2}{Skew(S)\sqrt{Var(S)}} \quad k = \mathbb{E}[S] - \frac{2\sqrt{Var(S)}}{Skew(S)}}$$

c) Approximation par construction d'1 base de polynômes orthog.

L'objectif est d'approcher la densité / f.d.r. à des ordres supérieurs.

Contexte général

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\omega(s) > 0$ une fonction de pondération sur I. On considère une famille de polynômes orthog. $\Pi_i(s)$ de degré i:

$$\int_I \Pi_i(s)\Pi_j(s)\omega(s)\, ds = 0.$$

Posons $C_k = \int_I \Pi_k^2(s)\omega(s)\, ds$.

Si la densité f est régulière, alors on montre qu'elle peut s'écrire comme une somme pondérée infinie de polynômes:

$$\boxed{f_S(s) = A_0\Pi_0(s)\omega(s) + A_1\Pi_1(s)\omega(s) + ...}$$

où les coefficients A_k sont déterminés par

$$\int_I \Pi_k(s) f_S(s)\, ds = \int_I \Pi_k(s) \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i \Pi_i(s) \omega(s) \right) ds \overset{<\Pi_i,\Pi_j>=0}{=} A_k \int_I \Pi_k^2(s) \omega(s)\, ds = A_k C_k,$$

et donc

$$A_k = \frac{\int_I \Pi_k(s) f_S(s)\, ds}{C_k} = \frac{\mathbb{E}[\Pi_k(S)]}{C_k}.$$

Pour une approx. à l'ordre k, il faut donc connaître les moments d'ordre k, obtenus à partir de ceux de N et Y_j lorsque $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$.

Voici donc maintenant quelques techniques utilisant ces propriétés.

$\rightarrow$ L'approx. à l'aide de la fonction Gamma (due à Bowers).

Idée: approcher f_S par la densité d'une loi Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \delta)$; en égalisant moyenne, variance et **moment d'ordre 3**.

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\alpha}{\delta} \quad Var(S) = \frac{\alpha}{\delta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\mathbb{E}[S]^2}{Var(S)} \quad \delta = \frac{\mathbb{E}[S]}{Var(S)}$$

Soit g_Z la densité de Z où $Z = \beta S$ avec $\beta = \frac{\mathbb{E}[S]}{Var(S)}$: ainsi

$$Z \sim \mathcal{G}(\alpha', \delta'), \text{ or } \mathbb{E}[Z] = Var(Z) \ \Rightarrow \ \delta' = \frac{\mathbb{E}[Z]}{Var(Z)} = 1, \quad \alpha' = \mathbb{E}[Z]$$

d'où on en déduit la loi de $Z \sim \mathcal{G}(\alpha', 1)$ (1 seul paramètre).
On approche $g_Z(z) = A_0 \Pi_0(z)\omega(z) + A_1 \Pi_1(z)\omega(z) + ...$ avec les poids $\omega(z)$ et les polynômes de Laguerre.

$$\omega(s) = \frac{s^{\alpha'-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-s} \quad \text{et} \quad \Pi_k(s) = (-1)^k s^{1-\alpha'} e^s \frac{d^k}{ds^k}(s^{k+\alpha'-1} e^{-s}).$$

Les coefficients C_k sont donnés par $C_k = k!\, \frac{\Gamma(\alpha'+k)}{\Gamma(\alpha')}$ et

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = A_2 = 0 \qquad A_3 = \frac{1}{6}\left(\mathbb{E}[(Z-\alpha')^3] - 2\alpha'\right).$$

Finalement, les **approx. de g_Z et G_Z (f.d.r.) à l'ordre 3 valent**

$$\begin{aligned} g_Z(z) &= \omega(z) + A_3\, \Pi_3(z)\, \omega(z) \qquad \text{puis en intégrant} \\ G_Z(z) &= W(z) + A_3 \int_0^z \Pi_3(u)\, \omega(u)\, du \\ &= W(z) - A_3\, z^{\alpha'} e^{-z} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha'+1)} - \frac{2z}{\Gamma(\alpha'+2)} + \frac{z^2}{\Gamma(\alpha'+3)} \right). \end{aligned}$$

d) Approximation par séries approchant une distrib. de proba.

→ L'approximation de Gram-Charlier (de type Normal-Power).

On approxime la densité f_S par une gaussienne de même moyenne et variance, en utilisant les moments d'ordre $>$.

Notons $\mu = \mathbb{E}[S]$, $\sigma^2 = Var(S)$, et $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$.
$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et notons g_Z la densité de Z, et G_Z sa f.d.r.

On approxime g sur $I =]-\infty, \infty[$ à l'aide de la pondération $\omega(s)$ et des polynômes d'Hermite:

$$\omega(s) = \phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Pi_k(s) = \frac{\phi^{(k)}(s)}{\phi(s)},$$

où ϕ est la densité d'une loi normale centrée réduite.

Les coefficients C_k valent $C_k = k!$, et

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = A_2 = 0 \qquad A_3 = -\frac{\mathbb{E}[Z^3]}{3!} \qquad A_4 = \frac{\mathbb{E}[Z^4] - 3}{4!}$$

Application: $S \sim \mathcal{P}Comp(\lambda, F_Y)$.

Posons $p_k = \mathbb{E}[Y_j^k] \;\Rightarrow\; \mu = \mathbb{E}[S] = \lambda p_1, \quad \mathbb{E}[(S-\mu)^2] = \lambda p_2,$

$$\mathbb{E}[(S-\mu)^3] = \lambda p_3 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[(S-\mu)^4] = \lambda p_4 + 3\lambda^2 p_2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A_3 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{p_3}{3!\,p_2^{3/2}} \text{ (cf slide 79)} \\ A_4 = \frac{1}{\lambda}\,\frac{p_4}{4!\,p_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A_3 \text{ et } A_4 \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par contre $A_5 \sim \frac{Cste}{\lambda^{3/2}}$ et $A_6 \sim \frac{Cste}{\lambda}$.

$\rightarrow$ L'approximation d'Edgeworth (de type Normal-Power).

Soit $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$, alors $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Notons $M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}]$.

Le développement de Taylor de $\ln M_Z(t)$ en $t \in v(0)$ donne

$$\ln M_Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ..., \quad \text{avec } a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \ln M_Z(t)\bigg|_{t=0}.$$

$$\Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 = \frac{M_Z'(t)}{M_Z(t)}\bigg|_0 = \frac{\mathbb{E}[Z]}{1} = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{\mathbb{E}[Z^3]}{3!},\ a_4 = \frac{\mathbb{E}[Z^4]-3}{4!}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_Z(t) &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\exp(a_3 t^3 + a_4 t^4 + ...) \\ &\overset{DL}{=} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(1 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \left(\frac{a_3^2}{2} + a_6\right) t^6 + ...\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Et remarquons aussi que (avec $\phi(z)$ densité d'une $\mathcal{N}(0,1)$)

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\phi(z)\,dz}_{M_Z(t)}, \quad t^k \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\phi^{(k)}(z)\,dz. \; (2)$$

Par unicité de la transformée de Laplace, on peut retrouver la densité g_Z par identification dans l'intégrale en reprenant les équations (1) et (2).

Ainsi, g_Z doit satisfaire

$$g_Z(z) = \phi(z) - a_3\phi^{(3)}(z) + a_4\phi^{(4)}(z) - a_5\phi^{(5)}(z) + \left(\frac{a_3^2}{2} + a_6\right)\phi^{(6)}(z) - ...$$

$\rightarrow$ L'approximation d'Esscher (découlant d'Edgeworth).

On considère une v.a.p. S de f.d.r. F_S et f.g.m. $M_S(t)$.
On définit pour tout h une nouvelle v.a. S_h telle que

$$dF_h(x) = \frac{e^{hx} dF_S(x)}{M_S(h)} \quad \Rightarrow \quad M_h(t) = \frac{M_S(t+h)}{M_S(h)}$$

Exemple: $S \sim \mathcal{P}comp(\lambda, F_Y)$, donc $S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$:

$$M_h(t) = \frac{M_S(t+h)}{M_S(h)} \Rightarrow M_h(t) = \exp\left(\lambda M_Y(h)\left[\frac{M_Y(t+h)}{M_Y(h)} - 1\right]\right),$$

ce qui revient à remplacer λ par $\lambda M_Y(h)$ et Y par Y_h (slide 15).

Par ailleurs, $\mathbb{E}[S_h] \overset{def}{=} M_h'(0)$ avec $M_h'(t) = \frac{1.M_S'(t+h)}{M_S(h)}$. Ainsi,

$$\frac{\partial \mathbb{E}[S_h]}{\partial h} = \frac{M^{''}(h)M(h) - M^{'}(h)^2}{M(h)^2} = M_h^{''}(0) - (M_h^{'}(0))^2 = Var(S_h) > 0.$$

En s'intéressant à $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x)$ pour un x donné, choisissons h tel que

$$\mathbb{E}[S_h] = \frac{M_S^{'}(h)}{M_S(h)} = x.$$

[**Tjs possible si** $x > \mathbb{E}[S]$ **et** $h > 0$**, ou** $x < \mathbb{E}[S]$ **et** $h < 0$]

Appliquons le développement d'Edgeworth à $Z_h = \frac{S_h - \mathbb{E}[S_h]}{\sqrt{Var(S_h)}}$:

$$f_h(y)dy = \phi(z)dz - \frac{\mathbb{E}[(S_h - x)^3]}{6Var(S_h)^{3/2}}\phi^{(3)}(z)dz \simeq g(z)\,dz, \quad \left(z = \frac{y - x}{\sqrt{Var(S_h)}}\right).$$

Rappelons que

$$
\begin{array}{rcll}
f(y) & \stackrel{def}{=} & M(h)e^{-hy}f_h(y) & \\
F(y) & = & M(h)\displaystyle\int_{-\infty}^{y} e^{-hx}f_h(x)\,dx & (i) \\
\bar{F}(y) & = & M(h)\displaystyle\int_{y}^{\infty} e^{-hx}f_h(x)\,dx & (ii)
\end{array}
$$

Pour $h > 0$, nous obtenons

$$
\bar{F}(x) = M(h)\,e^{-hx}\left(E_0(u) - \frac{\mathbb{E}[(S_h - x)^3]}{6(Var(S_h))^{3/2}}E_3(u) + ...\right)
$$

avec $u = h\sqrt{Var(S_h)}$ et $E_k(u) = \int_0^\infty e^{-uz}\phi^{(k)}(z)\,dz$.

Exemple (suite) :

$$\begin{aligned}
\lambda\, M_Y(h) &= x \\
Var(S_h) &= \lambda\, M_Y''(h) \\
\mathbb{E}[(S_h - x)^3] &= \lambda\, M_Y^{(3)}(h) \\
\bar{F}(x) &= e^{\lambda(M_Y(h)-1)-hx}\left(E_0(u) - \frac{M_Y^{(3)}(h)}{6\sqrt{\lambda}(M_Y''(h))^{3/2}} E_3(u)\right)
\end{aligned}$$

où $u = h\,\sqrt{\lambda\, M_Y''(h)}$.

Les inconvénients de la méthode sont notamment:

- nécessité de connaître M_h;
- être capable d'inverser $\mathbb{E}[S_h]$ en fonction de h.

Problème

Ce sont des dvp formels: on ignore la question de CV, ce qui nous amène a considérer des séries tronquées (perte en précision).

- \- l'approximation d'Edgeworth est très bonne autour de la moyenne, mais mauvaise dans les queues de distribution;
- \+ Lui préférer dans ce cas-là l'approximation d'Esscher;
- \- Gram-Charlier DV en général: la qualité de l'approx. n'est pas forcément améliorée par l'ajout de termes...
- \+ Edgeworth et Gram-Charlier approchent une distribution de proba. par ses cumulants ($\sim$ moments);
- \+ Edgeworth et Gram-Charlier sont identiques pour les termes 3 et 4, mais pas pour les autres.

Approximation du MRI par le MRC

Comment approximer le modèle individuel par le modèle collectif ?

L'idée est d'écrire le modèle individuel d'une autre manière afin de retrouver l'expression classique du modèle collectif. On rappelle que

$$\boxed{S^{ind} = Y_1 + ... + Y_n,}$$

avec $\quad Y_j = N_j B_j, \quad$ où $\quad N_j \sim \mathcal{B}(p_j).$

Rq: Y_j s'écrit aussi $Y_j = \sum_{i=1}^{N_j} B_j$, avec la convention $\sum_{i=1}^{0} = 0$.

i) Première approximation : on remplace Y_j par

$$Y_j \equiv Y_j^{ac} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_j} B_{j,i} \quad \text{avec } \tilde{N}_j \sim \mathcal{P}(p_j) \ \text{ et } \ B_{j,i} \sim B_j \ \text{ i.i.d.}$$

En notant “ac” l’approximation par le modèle collectif, on retrouve

$$S^{ac} = Y_1^{ac} + ... + Y_n^{ac}.$$

S^{ac} s’écrit donc sous la forme d’un modèle collectif, où

$$\boxed{S^{ac} \sim \mathcal{P}Comp(\lambda = \sum_{j=1}^{n} p_j,\ F = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{\lambda} F_{B_j}).}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S^{ac}] &= \\ Var(S^{ac}) &= \\ Var(S^{ind}) &= \end{aligned}$$

Donc $\boxed{Var(S^{ac}) \geq Var(S^{ind}).}$

Rq: $\mathbb{E}[N_j] = \mathbb{E}[\tilde{N}_j]$, et S^{ac} est plus conservatif (prudent) car

$$e^{-p_j} \geq 1 - p_j \Rightarrow \begin{cases} F_{N_j}(x) \leq F_{\tilde{N}_j}(x) & \text{pour } x \in [0, 1[\\ F_{N_j}(x) \geq F_{\tilde{N}_j}(x) & \text{pour } x \in]1, \infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{N}_j \geq_{SD2} N_j \\ S^{ac} \geq_{SD2} S^{ind} \end{cases}$$

ii) Seconde approximation : $S^{ac} = Y_1^{ac} + ... + Y_n^{ac}$ avec

$$Y_j \equiv Y_j^{ac} = \sum_{i=1}^{\nu_i} Y_{j,i} \quad \text{avec } Y_{j,i} \sim Y_j \text{ i.i.d. et } \nu_i \sim \mathcal{P}(1).$$

Ainsi

$$\boxed{S^{ac} \sim \mathcal{P}Comp\left(\lambda = n,\ F = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j\right).}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^{ac}] &= \\
Var(S^{ac}) &=
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{Var(S^{ac}) \geq Var(S^{ind})}$ et $\nu_i \geq_{SD2} 1 \Rightarrow \boxed{S^{ac} \geq_{SD2} S^{ind}}$.

Réassurance et impact sur la sinistralité dans le MRC

Objectif: analyser l'impact de la réassurance sur la distribution du montant agrégé des sinistres dans le modèle collectif.

Ceci est étudié pour deux grandes familles de contrat:

→ les contrats quote-part: proportion fixe de chaque sinistre.
Si un sinistre de montant X_j se produit, l'assureur paie

$$Y_j = \alpha X_j.$$

De son côté, le réassureur paie donc $Z_j = (1 - \alpha)X_j$.
Au final l'assureur paie αS, le réassureur $(1 - \alpha)S$.

Le nb de sinistres reste identique, seule la loi du montant est modifiée par une homothétie: **pas d'impact notoire** sur les calculs dans le cadre du modèle collectif $[MRC(N, Y_j = \alpha X_j)]$.

$\rightarrow$ les contrats en excédent de sinistre (Excess-of-Loss): priorité P (ou rétention) et portée du contrat.

Supposons par exemple la portée illimitée. Pour un sinistre X_j,

l'assureur paie $Y_j = \begin{cases} X_j & \text{si } X_j \leq P \\ P & \text{si } X_j > P \end{cases}$

et le réassureur paie $Z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } X_j \leq P \\ X_j - P & \text{si } X_j > P. \end{cases}$

Définissons $\underline{N}_P = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{[X_j \leq P]}$ et $\bar{N}_P = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{[X_j > P]}$.

L'assureur considère le nv modèle collectif $MRC(N, Y_j)$.
Le réassureur considère le modèle collectif $MRC(N, Z_j)$.

$MRC(N, Z_j)$ a la même distribution que $MRC(\bar{N}'_P, \tilde{Z}_j)$ où

- $\bar{N}'_P$ a la même distribution que $\bar{N}_P$,
- $\bar{N}'_P$ est indépendant des $\tilde{Z}_j$,
- les $\tilde{Z}_j$ ont même distrib. que Z_j conditionnellement à $Z_j > 0$.

L'objectif est donc de déterminer ces différentes distributions... en particulier celles de $\underline{N}_P$ et $\bar{N}_P$.

Distributions de $\underline{N}_P$ et $\bar{N}_P$

Exemple

$$\text{Si} \quad N \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \text{alors} \begin{cases} \bar{N}_P & \sim & \mathcal{P}(\lambda(1 - F_X(P))) & \rightarrow X > P \\ \underline{N}_P & \sim & \mathcal{P}(\lambda F_X(P)) & \rightarrow X \leq P \end{cases}$$

Preuve.

Exemple

$$\textit{Si} \quad N \sim \mathcal{NB}(r,p), \quad \textit{alors} \quad \begin{cases} \bar{N}_P & \sim & \mathcal{NB}\left(r,\ \frac{p}{p+(1-p)(1-F_X(P))}\right) \\ \underline{N}_P & \sim & \mathcal{NB}\left(r,\ \frac{p}{p+(1-p)F_X(P)}\right) \end{cases}$$

Preuve.

Moyenne de la sinistralité du risque individuel

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_j] &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Exemple 1: si $X_j \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[Y_j] = \frac{1}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda P))$.

Exemple 2: si $X_j \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ alors

$$\mathbb{E}[Y_j] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + P}\right)^{\alpha} \frac{\lambda + P}{\alpha - 1}.$$

3 Modèle individuel et modèle collectif en assurance

- Les différentes approches
- Le modèle de risque individuel (MRI)
- Le modèle de risque collectif (MRC)
- Choix des rétentions et priorités en réassurance

Introduction

Dans toute cette partie, nous nous plaçons dans un modèle de risque individuel où la distribution de chacun des risques est modélisée par une approche fréquence-coût:

$$S = S_1 + ... + S_n,$$

avec $S_j = \sum_{i=1}^{N_j} Y_{i,j}$.

Hypothèses et notations:

- $\rightarrow$ les $Y_{i,j}$ sont des v.a. i.i.d. de f.d.r. F_j ;
- $\rightarrow$ $\mu_j = \mathbb{E}[S_j]$ et $\sigma_j^2 = Var(S_j)$;
- $\rightarrow$ Π_j : prime d'assurance du j^e risque / $\Pi_{r,j}$: prime réassurance.

Question:

sachant que l'assureur a la possibilité de se réassurer, quel est le meilleur mode et niveau de conservation des risques?

Déclinaisons de la problématique: dans le cas de traités EoL ou excédents de pleins, les niveaux de rétentions et priorités dépendent-ils de la nature des risques individuels du portefeuille?

Contexte: critère d'optimisation $=$ maximisation de l'espérance du résultat **net de réassurance** sous contrainte de variance fixée.

Paramètres du problème: caractéristiques des risques à réassurer et principe de calcul de prime du réassureur.

La réassurance proportionnelle par quote-part (QP) (**quota-share** ou **QS**)

Effet sur la distribution des pertes de l’assureur

La réassurance prop. en excédent de plein (XP) (Surplus)

L'assureur fixe un niveau de rétention et une limite, le partage des primes équivaut à la part du risque conservée ($\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$).

Effet sur la distribution des pertes de l’assureur

Optimisation de l'assureur et réassurance proportionnelle

Supposons que le taux de rétention du risque j vaut α_j et que le réassureur reverse une commission de réassurance, de taux γ_j.

La prime de réassurance vaut donc $\boxed{\Pi_{r,j} = (1 - \alpha_j)(1 - \gamma_j)\Pi_j}$.

On veut trouver les taux de rétention $(\alpha_j)_{j=1,\dots,n}$ t.q. la variance du résultat de l'assureur (net de réassurance), donné par

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - \Pi_{r,j}) - \sum_{j=1}^{n}(1 - (1 - \alpha_j))S_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Pi_j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_jS_j + \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(1 - \alpha_j)\Pi_j, \end{aligned}$$

soit la plus petite possible, sous la contrainte que l'espérance soit fixée à R_0 et appartienne à

$$R_0 \in \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Pi_j \; ; \; \sum_{j=1}^{n} (\Pi_j - \mu_j) \right].$$

Remarques:

→ $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Pi_j$ est l'espérance du résultat net si la réassurance prend en charge 100% du risque (γ_j est un taux de frais versé par le réassureur à l'assureur pour la gestion des contrats);

→ $\sum_{j=1}^{n} (\Pi_j - \mu_j)$ est l'espérance du résultat net sans réassurance.

Theorem

Soit $k_j = (1-\gamma_j)\Pi_j - \mu_j$. *Alors pour tout j,*

$$\alpha_j = \alpha_j(\rho) = \min\left(\rho\frac{k_j}{\sigma_j^2}, 1\right),$$

où ρ *est tel que* $R_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j\Pi_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho)k_j$.

Remarque: $k_j > 0$ puisque $(1-\gamma_j)\Pi_j$ doit couvrir plus que le risque pur μ_j. Les taux de commission satisfont donc nécessairement

$$k_j > 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_j < 1 - \underbrace{\frac{\mu_j}{\Pi_j}}_{LR} \quad \text{(LR: Loss-ratio)}$$

Preuve. Première étape: retrouver la forme de α_j.
En reprenant l'expression du résultat net:

$$R =$$

$$\mathbb{E}[R] =$$

$$Var(R) =$$

Et on cherche à résoudre l'un des programmes suivants:

1. $\arg\max_{\alpha_j} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j$ s.c. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sigma_j^2 = V_0$ et $\alpha_j \in [0,1]$,
2. $\min \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sigma_j^2$ s.c. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j = R_0 - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Pi_j$ et $\alpha_j \in [0,1]$.

Le Lagrangien du 2ème problème s'écrit

$$L(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sigma_j^2 - 2\rho \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j - \left(R_0 - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Pi_j \right) \right),$$

avec 2ρ le multiplicateur de Lagrange. Ainsi,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = 2\alpha_j \sigma_j^2 - 2\rho k_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_j = \rho \frac{k_j}{\sigma_j^2} \geq 0.$$

Or $\alpha_j \in [0, 1]$ et on cherche un min; donc on choisira logiquement

$$\alpha_j(\rho) = \min\left(1,\ \rho \frac{k_j}{\sigma_j^2}\right).$$

Interprét.: $+$ la prime est chère, $+$ la commission est faible, ou $+$ la variance du risque est faible, plus la part conservée est grande.

Deuxième étape: existence et détermination de $\rho = \rho^*$?

On va naturellement utiliser la contrainte sur l'espérance du résultat. Vu l'expression de $\alpha_j(\rho)$, on a $\sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) k_j \geq 0$.
Clairement, $\sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) k_j$ est croissante et continue en ρ comme somme de fonctions croissantes et continues. De plus,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(0) k_j \overset{\alpha_j(0)=0}{=} 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j(\infty) k_j \overset{\alpha_j(\infty)=1}{=} \sum_{j=1}^n k_j \geq R_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j \Pi_j.$$

(la dernière expression équivaut à $R_0 \leq \sum_{j=1}^n (\Pi_j - \mu_j)$)

On sait donc que $\exists \rho^*$ grâce au théo. des valeurs intermédiaires /

$$\mathbb{E}[R] = R_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho^*) k_j = R_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j \Pi_j.$$

Cas particulier : assurances à valeurs déclarées déterministes c_j.

On suppose souvent que la charge sinistre S_j s'écrit $c_j U_j$, avec

- $\longrightarrow$ U_j est une v.a. qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$;
- $\longrightarrow$ $\forall j, \quad \mathbb{E}[U_j] = \mu \quad$ et $\quad Var(U_j) = \sigma^2$.

Supposons égaux tous les taux de commission, i.e. $\gamma_j = \gamma$.

Alors

$$\mu_j = \mu c_j \qquad\qquad \sigma_j^2 = \sigma^2 c_j^2,$$

$$\Pi_j = \pi c_j \qquad \text{et} \qquad k_j = (1-\gamma)\,\pi\, c_j - \mu\, c_j = k c_j$$

donc en utilisant le théorème:

$$\alpha_j = \min\left(1,\, \rho \frac{k\, c_j}{\sigma^2\, c_j^2}\right) = \min\left(1\,;\, \frac{c}{c_j}\right),$$

avec $c = \frac{\rho k}{\sigma^2}$.

Exemple de réassurance proportionnelle sur assurance à valeurs déclarées: traité en excédent de plein où C: plein de conservation.

- $\rightarrow$ Lorsque $C_j \leq C$, il y a absence de cession.
- $\rightarrow$ Lorsque $C_j \geq C$, la conservation est égale au plein.

Optimisation de l’assureur et réass. non-proportionnelle

Supposons que

- $\rightarrow$ le réassureur utilise le principe de l’espérance mathématique pour tarifer sa prime: le coefficient de chargement du risque j est noté β_j;
- $\rightarrow$ le nombre de sinistres est poissonnien: $N_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$.

Nous allons étudier dans cette partie deux types de contrats:

1. les contrats en excédents de sinistre;
2. les contrats en excédents de perte.

Les excédents de sinistre (XS) (Excess-of-Loss ou XL)

Traités utilisés pour la couverture contre les gros risques.

Effet sur la distribution des pertes de l'assureur

Les contrats en excédent de perte (Stop-Loss ou SL)

Ce type de traité est activé lorsque l'assureur est en perte.

Effet sur la distribution des pertes de l'assureur

1) Optimisation pour les traités en excédents de sinistre

Chaque risque j est réassuré à l'aide d'un traité EoL (∞ XS P_j), où P_j est la priorité du risque j.

L'assureur conserve par risque j (où chaque risque est modélisé par fréquence-coût) le coût suivant:

$$S_j(P_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \min(Y_{i,j}, P_j) \overset{notation}{=} \sum_{i=1}^{N_j} Y_{i,j}(P_j).$$

On cherche à déterminer les niveaux des priorités $(P_1, ..., P_n)$ tels que la variance du résultat net donné par

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - \Pi_{r,j}) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_j} \min(Y_{i,j}, P_j)}$$

soit la plus petite possible sous contrainte d'espérance fixée à R_0 et appartenant à l'intervalle

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - (1+\beta_j)\mu_j)\ ;\ \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - \mu_j)\right].$$

Theorem

$$\forall j, \quad P_j = K\beta_j$$

avec K tel que

$$R_0 - \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - (1+\beta_j)\mu_j) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\mathbb{E}[N_j]\,\mathbb{E}[\min(Y_{i,j},\ K\beta_j)].$$

Preuve.

2) Optimisation pour traités en excédent de perte par risque

Chaque risque j est réassuré avec un Stop-Loss de priorité P_j et de portée illimitée. On note F_{S_j} la distribution de $S_j = \sum_{i=1}^{N_j} Y_{i,j}$.

L'assureur conserve alors (par classe de risque) la sinistralité

$$S_j(P_j) = \min\left(\sum_{i=1}^{N_j} Y_{i,j}\,,\,P_j\right).$$

On veut déterminer les niveaux de priorité $(P_j)_{j=1,\ldots,n}$ tels que la variance du résultat net de réassurance donné par

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - \Pi_{r,j} - S_j(P_j))}$$

soit la plus petite possible sous contrainte d'espérance fixée à R_0 appartenant à l'intervalle

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - (1+\beta_j)\mu_j)\ ;\ \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - \mu_j)\right].$$

Theorem

$$\forall j, \qquad P_j = K\beta_j + \int_0^{P_j} \bar{F}_{S_j}(x)\,dx,$$

avec K tel que $R_0 - \sum_{j=1}^{n}(\Pi_j - (1+\beta_j)\mu_j) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j(P_j - K\beta_j)$.

Preuve.

4 Calcul de prime et introduction aux mesures de risque

Définition

Soit la variable aléatoire positive (v.a.p.) S du montant cumulé des sinistres d'une police pour une période de garantie donnée.

Soit $\mathbb{F}$ l'espace des fonctions de répartition (f.d.r.) des v.a.p.

Un **principe de calcul de prime** est une fonction

$$\boxed{\begin{array}{rrl} H: & \mathbb{F} & \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ & F & \rightarrow H(F) \end{array}}$$

La prime déduite du principe H dépendra des caractéristiques de la f.d.r. de S, notée F_S.

Par exemple:

- $\rightarrow$ le premier moment: $\mathbb{E}[S] = \int_0^\infty s \, dF_S(s)$;
- $\rightarrow$ la variance: $Var(S) = \int_0^\infty (s - \mathbb{E}[S])^2 \, dF_S(s)$.

Vocabulaire: une prime infinie définit un risque inassurable.

4 Calcul de prime et introduction aux mesures de risque

- Les principes classiques de tarification
- Propriétés souhaitables des principes de tarification
- Résumé des propriétés de chaque principe de prime
- Mesures de risque célèbres

Principe de l'espérance mathématique

Notons Π la prime, S le montant cumulé des sinistres de la police.

Le principe de la prime pure donne $\boxed{\Pi(S) = \mathbb{E}[S].}$

Le principe de l'espérance mathématique donne

$$\boxed{\Pi(S) = (1+\beta)\,\mathbb{E}[S], \qquad \beta > 0.}$$

$\rightarrow$ Chargement très simple, mais n'apporte aucune information sur les fluctuations de S autour de sa moyenne...

Difficulté de ce principe: choix de β.

Remarque: pour des risques dégénérés ($\mathbb{P}(S = s) = 1$), on devrait avoir $\Pi(S) = s$ ce qui n'est pas vrai ici.

Pour évaluer son risque de perte, l'assureur peut utiliser la théorie des grandes déviations et le **lemme de Chernoff**.

Lemme

(Chernoff). Soient $S_1, S_2, ..., S_n$ *des v.a.p. indépendantes et de même loi que* S *telles que* $\mathbb{E}[e^{tS}] < \infty$ *pour un* $t > 0$. *Posons* $X_i = S_i - (1+\beta)\mathbb{E}[S_i]$. *Alors*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 0\right) \leq \rho^n \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 0\right) = \log \rho,$$

où $\quad \rho = \inf_t M_X(t) < 1 \quad$ *et* $\quad M_X(t) = \exp(-t(1+\beta)\mathbb{E}[S_i])\, M_S(t)$.

Preuve.

Ainsi, si l'assureur souhaite **majorer par ϵ la probabilité d'un résultat négatif** sur la période, donc

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 0\right) \leq \epsilon,$$

il choisira β tel que

$$\boxed{\rho^n(\beta) = \epsilon.}$$

Exemple

Si $S \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, alors $\rho(\beta) = e^{-\beta}(1+\beta)$.

Principe de la variance

Le principe de la variance donne

$$\boxed{\Pi(S) = \mathbb{E}[S] + \beta\, Var(S), \qquad \beta > 0.}$$

Inconvénient: symétrie par rapport à l'espérance.

$\rightarrow$ On comptabilise les valeurs négatives de la v.a. $(S - \mathbb{E}[S])$, pourtant favorables à l'assureur.

Conséquence: on augmente trop les chargements techniques.

i) Application du principe à la réassurance proportionnelle.

Cherche une couverture pour une proportion $\lambda \in [0,1]$ du risque S:

$$\Pi(\lambda S) = \mathbb{E}[\lambda S] + \beta \, Var(\lambda S) = \lambda \mathbb{E}[S] + \lambda^2 \beta \, Var(S) < \lambda \Pi(S).$$

Donc l'assuré aurait intérêt à **diviser son risque initial** en n parties égales car il paierait moins cher: en effet,

$$n \, \Pi\left(\frac{S}{n}\right) < \Pi(S).$$

Rq: $\lim_{n\to\infty} n \, \Pi\left(\frac{S}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}[S] + \frac{\beta}{n} Var(S)\right) = \mathbb{E}[S]$ (prime pure).

ii) Principe de la variance et réassurance non proportionnelle.

Suivant les cas de figure, la prime pour l'assuré sera plus ou moins intéressante suivant que l'assureur se réassure lui aussi ou non.

iii) Principe de la variance et agrégation de risques indépendants.

Si on considère deux risques indépendants S_1 et S_2, on a

$$\boxed{\Pi(S_1 + S_2) = \Pi(S_1) + \Pi(S_2)},$$

ce qui implique que l'accumulation de risques indépendants **ne conduit pas au principe de diversification**.

Donc pas de diminution de la prime. Ceci parait peu vraisemblable.

Principe de l'écart-type

Le principe de l'écart-type donne

$$\boxed{\Pi(S) = \mathbb{E}[S] + \beta\,\sigma(S), \qquad \beta > 0.}$$

A l'inverse, le découpage du risque ici ne conduit pas à une diminution de la prime:

$$n\,\Pi\left(\frac{S}{n}\right) = \Pi(S).$$

Principe exponentiel

Le principe exponentiel donne

$$\boxed{\Pi(S) = \frac{1}{\alpha}\ln(\mathbb{E}[e^{\alpha S}]).}$$

Le paramètre α est appelé **coefficient d'aversion au risque**.

D'après l'inégalité de Jensen, la prime technique est supérieure à la prime pure:

$$\Pi(S) \geq \mathbb{E}[S].$$

En effet, si α est proche de 0, en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace:

$$
\begin{aligned}
\Pi(S) &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\mathbb{E}[S]+\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}[S^2]+o(\alpha^2)\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha\mathbb{E}[S]+\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}[S^2]\right)-\frac{1}{2\alpha}\left(\alpha\mathbb{E}[S]+\frac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}[S]\right)^2+o(\alpha)\\
&= \mathbb{E}[S]+\frac{\alpha}{2}\,Var(S)+o(\alpha)
\end{aligned}
$$

On retrouve le principe de la variance...

Si

- → $\alpha \to 0$: principe de la prime pure;
- → $\alpha \to \infty$: principe de la perte maximale,

$$\Pi(S) \to \sup\{s\ :\ \mathbb{P}(S < s) < 1\} = r_s.$$

Principe de l'utilité nulle

Le principe de l'utilité nulle (ou équivalent certain) donne pour une fonction d'utilité u **strictement croissante et concave**, $\Pi(S)$ telle que

$$\mathbb{E}[u(\Pi(S) - S)] = u(0).$$

Globalement, en incluant des réserves R affectées au risque, on peut avoir

$$\boxed{\mathbb{E}[u(R + \Pi(S) - S)] = u(R).}$$

Ainsi, $\Pi(S)$: prix auquel l'assureur est indifférent entre offrir une couverture d'assurance ou ne rien faire.

En utilisant l'inégalité de Jensen pour des fonctions concaves,

$$u(R) \overset{def}{=} \mathbb{E}[u(R+\Pi(S)-S)] \overset{Jensen}{\leq} u(R+\Pi(S)-\mathbb{E}[S]).$$

u croissante: $u(R) \leq u(R+\Pi(S)-\mathbb{E}[S]) \Rightarrow R \leq R+\Pi(S)-\mathbb{E}[S]$, donc

$$\Pi(S)-\mathbb{E}[S] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi(S) \geq \mathbb{E}[S].$$

Pour

- $\rightarrow$ $u(x)=x$: aversion au risque nulle (principe de la prime pure);
- $\rightarrow$ $u(x)=-e^{-\alpha x}$: fonction d'utilité CARA (principe exponentiel).

Remarque: le choix de u est **délicat** !

Principe de la valeur moyenne

Le principe de la valeur moyenne s'appuie sur une fonction f continue, convexe et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\Pi(S) = f^{-1}\left(\mathbb{E}[f(S)]\right)}.$$

Idem au principe exponentiel, l'inég. de Jensen $\Rightarrow$ $\Pi(S) \geq \mathbb{E}[S]$.

Pb: le choix de la fonction f est aussi délicat. Par exemple,

- $\rightarrow$ $f(x) = x^\beta$: principe de la moyenne d'ordre β ($\beta \geq 1$);
- $\rightarrow$ $\beta \rightarrow \infty$: principe de la valeur maximale;
- $\rightarrow$ $f(x) = e^{\alpha x}$: principe exponentiel.

Illustrations

i) Principe de la valeur moyenne lorsque le risque S est faible.

S peu variable, donc posons $S = \mathbb{E}[S] + \lambda\omega$, où ω est centrée.
Si λ petit, un dénveloppement de Taylor donne

$$
\begin{aligned}
\Pi(S) &= f^{-1}\left(\mathbb{E}[f(\mathbb{E}[S] + \lambda\omega)]\right) \\
&= \mathbb{E}[S] + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[\omega^2]\frac{f''(\mathbb{E}[S])}{f'(\mathbb{E}[S])} + o(\lambda^2) \\
&= \mathbb{E}[S] + \frac{\alpha(S)}{2}\, Var(S)
\end{aligned}
$$

On retombe sur le principe de la variance, mais le facteur devant la variance depend de S...

Remarquons aussi que f peut se réécrire $f(y) = -u(-y)$ avec u fonction d'utilité croissante et concave.

En effet $f^{'}(y) = u^{'}(-y)$ et $f^{''}(y) = -u^{''}(-y)$, ce qui donne

$$\frac{f^{''}(\mathbb{E}[S])}{f^{'}(\mathbb{E}[S])} = -\frac{u^{''}(-\mathbb{E}[S])}{u^{'}(-\mathbb{E}[S])}$$

qui est le **coefficient d'aversion au risque** en $-\mathbb{E}[S]$.

Remarque:

Si l'utilité est exponentielle, $\alpha(S)$ ne dépend pas de S car

$$u^{'} = u^{''}.$$

ii) Agrégation de risques individuels.

Soit un portefeuille de n risques $\perp\!\!\!\perp$ de même loi S_i. La sinistralité agrégée s'écrit $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$.

Les primes sont données par

$$\Pi(S_i) = -u^{-1}(\mathbb{E}[u(-S_i)]).$$

On veut comparer

$$\Pi(S) = -u^{-1}\left(\mathbb{E}\left[u\left(-\sum_{i=1}^{n} S_i\right)\right]\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \Pi(S_i).$$

Supposons S peu risqué, alors $MR(S_i) = \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[\omega_i^2]\left\{-\frac{u''(-\mathbb{E}[S_i])}{u'(-\mathbb{E}[S_i])}\right\}$.

Ainsi les chargements techniques respectifs sont donc

$$MR(S) = \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\omega_i^2]\left\{-\frac{u''(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[S_i])}{u'(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[S_i])}\right\},$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} MR(S_i) = \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\omega_i^2]\left\{-\frac{u''(-\mathbb{E}[S_i])}{u'(-\mathbb{E}[S_i])}\right\}.$$

Puisque les risques sont identiquement distribués: $\mathbb{E}[\omega_i] = \mathbb{E}[\omega]$, et donc pour avoir $MR\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} MR(S_i)$, il faut

$$-\frac{u''(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[S_i])}{u'(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[S_i])} \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{u''(-\mathbb{E}[S_i])}{u'(-\mathbb{E}[S_i])}.$$

Ce qui équivaut à avoir

$$-\frac{u''(-n\mathbb{E}[S_1])}{u'(-n\mathbb{E}[S_1])} \leq -\frac{u''(-\mathbb{E}[S_1])}{u'(-\mathbb{E}[S_1])}.$$

Il suffit donc que le coefficient d'aversion au risque soit décroissant (DARA: Diminishing Absolute Risk Aversion).

Exemple: les fonctions logarithmique ou puissance ont cette propriété. Avec l'utilité exponentielle, il y a égalité.

Principe d'Esscher

Le principe d'Esscher préconise de choisir une prime égale à

$$\boxed{\Pi(S) = \frac{\mathbb{E}[Se^{\alpha S}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha S}]}.}$$

On peut montrer que $\Pi(S) \geq \mathbb{E}[S]$ puisque $Cov(S, e^{\alpha S}) \geq 0$.

Cette prime est l'espérance mathématique calculée avec la nouvelle f.d.r. G définie par

$$dG(x) = \frac{e^{\alpha x} dF_S(x)}{\int_0^{\infty} e^{\alpha x} dF_S(x)},$$

qui est la transformée d'Esscher de F_S.

Principe de Wang (proportional hazard transform)

Le principe de Wang s'appuie sur la définition

$$\boxed{\Pi(S) = \int_0^\infty (\bar{F}_S(x))^r\, dx,}$$

où $\bar{F}_S = 1 - F_S$ (survie), et $r \in [0, 1]$. On a $\Pi(S) \geq \mathbb{E}[S]$.

Ce principe est très utilisé en réassurance.

En effet, la transformée de Wang permet de calculer très simplement les primes des traités en **excédent de sinistre**.

Par exemple, pour un traité (noté dans la pratique: $hXSa$)

- de priorité a,
- de portée h,

on a:

$$hXSa = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq S \leq a \\ S - a & \text{si} \quad a \leq S \leq a + h \\ h & \text{si} \quad a + h \leq S \end{cases}$$

La prime vaut

$$\boxed{\Pi(hXSa) = \int_0^h (\bar{F}_S(x + a))^r \, dx = \int_a^{a+h} (\bar{F}_S(x))^r \, dx.}$$

Principe du fractile

Dans le principe du fractile, on adopte la prime Π qui vérifie

$$\boxed{\Pi(S) = \inf\left(p \,|\, F_S(p) \geq 1 - \epsilon\right) = \inf\left(p \,|\, \mathbb{P}(S > p) \leq \epsilon\right).}$$

C'est donc la plus petite prime telle que la probabilité que le sinistre dépasse la prime est au plus de ϵ.

Par exemple,

$\longrightarrow$ si $\epsilon = 1/2$, alors la prime est la médiane de la distribution;

$\longrightarrow$ si $\epsilon = 0$, alors la prime suit le principe de la perte maximale.

Utilisation pratique de ces concepts

Dans la pratique, pourquoi utiliser tel ou tel principe?

Mesure de Wang - traités de réassurance Excess of loss

...

Un assureur utilisant une mesure de risque donnée attend d'elle un ensemble de propriétés “naturelles” censées refléter la réalité...

1. La prime vaut au moins la prime pure: $\Pi(S) \geq \mathbb{E}[S]$.

   On peut ajouter que si $\mathbb{P}(S = s) = 1$, alors $\Pi(S) = s$.
   Ceci implique qu'il n'y ait pas de chargement injustifié.
   Parfois, le chargement peut même être négatif suivant les conditions de marché (concurrence, ...).

2. Invariance par translation: $\Pi(S + c) = c + \Pi(S), \ \forall c \geq 0$.

   c est une constante, et en particulier $\Pi(0) = 0$.
   Tout risque déterministe est tarifé à sa propre valeur.

3. Additivité: $\Pi(S_1 + S_2) = \Pi(S_1) + \Pi(S_2)$,

   si S_1 et S_2 sont indépendants.

   Cependant, cette propriété ne vérifie pas le principe de diversification des risques. On lui préfère la propriété

$$\Pi(S_1 + S_2) \leq \Pi(S_1) + \Pi(S_2).$$

   Rappelons au passage que le principe de la variance est additif, alors que celui de l'écart-type est sous-additif.

   Cette propriété induit un **gain de diversification**, qui profite
   - soit à l'assuré (prime plus faible),
   - soit à l'assureur (probabilité de ruine moins élevée).

4. Homogénéité: $\Pi(\lambda S) = \lambda\,\Pi(S),\ \forall \lambda \geq 0$.

   $\Rightarrow$ invariance par changement de numéraire, elle est essentielle pour la **réassurance proportionnelle**.

   Propriété remise en cause par quelques auteurs lorsque λ est grand ($\Pi(\lambda S) > \lambda\,\Pi(S)$).

5. Itérativité: $\Pi(S_1) = \Pi(\Pi(S_1 \mid S_2))$.

   On peut calculer la prime du risque S_1 en deux étapes:

   - $\rightarrow$ on applique d'abord la prime Π à la distribution de S_1 conditionnelle à S_2;
   - $\rightarrow$ on obtient une v.a.r., fonction de S_2, à laquelle on applique de nouveau le principe de prime.

Exemple

Le nombre annuel d'accidents d'un chauffeur est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le profil de risque λ est inconnu et différent pour chaque chauffeur, donc la réalisation d'une v.a.r. Λ. La loi du nombre d'accidents conditionnelle à $\Lambda = \lambda$ est de Poisson, et si $\Lambda \sim \mathcal{G}amma$ alors la loi est une binomiale négative.

6. Convexité: $\Pi(\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2) \leq \lambda \Pi(S_1) + (1-\lambda)\Pi(S_2)$,

   $\forall \lambda \in [0,1]$ et S_1, S_2.

   Cette propriété est utile pour la recherche de décisions optimales dans le choix de contrat d'assurance ou de réassurance.

Principes	Propriétés Prime pure	Trans.	Addit.	Itérat.	Homog.
Prime pure	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Espérance	$+$	–	$+$	–	$+$
Variance	$+$	$+$	$+$	–	–
Ecart-type	$+$	$+$	–	–	$+$
Exponentiel	$+$	$+$	$+$	$+$	–
Utilité	$+$	$+$	e	e	–
Valeur moyenne	$+$	e	e	$+$	–
Esscher	$+$	$+$	$+$	–	–
Fractile	$+$	$+$	$+$	$+$	–

$+$: la propriété est vérifiée; – : la propriété n'est pas vérifiée;
e : vérifiée en considérant les fonctions u et f qui nous permettent de retomber sur les principes exponentiel et prime pure.

Vérification des propriétés dans les cas spécifiques

Proposition

Le principe de la valeur moyenne (dans lequel f est convexe) vérifie l'invariance par translation si et seulement si

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad ou \quad f(x) = x.$$

Preuve

i) Condition nécessaire (CN $\Leftarrow$):

- $f(x) = x \;\Rightarrow\; \Pi(S+c) = \mathbb{E}[S+c] = \mathbb{E}[S] + c = \Pi(S) + c.$

- $f(x) = e^{\alpha x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha(S+c)}]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(e^{c}\,\mathbb{E}[e^{\alpha S}]\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha S}]\right) + c.$

ii) Condition suffisante (CS $\Rightarrow$):

Posons $S_{q,1} = (1-q)\,\delta_0 + q\,\delta_1 \quad \text{et} \quad \Pi(q) = f^{-1}\,\mathbb{E}[f(S_{q,1})]$.

On a donc $\quad f(\Pi(S_{q,1})) = f(\Pi(q)) = (1-q)\,f(0) + q\,f(1)$.

En dérivant par rapport à q à gauche et à droite de l'égalité puis en se plaçant en 0, on obtient

$$f^{'}(\Pi(0))\,\Pi^{'}(0) = f^{'}(0)\,\Pi^{'}(0) = f(1) - f(0).$$

Dériver une nouvelle fois en 0 amène à

$$f^{''}(0)\,\Pi^{'}(0)^2 + f^{'}(0)\,\Pi^{''}(0) = 0 \qquad (1).$$

On applique l'hypothèse d'invariance par translation à

$$f(\Pi(S_{q,1}+c)) = f(\Pi(S_{q,1})+c) = (1-q)\,f(0+c) + q\,f(1+c).$$

Dérivons 2 fois cette dernière expression,

$$f^{''}(\Pi(q)+c)\,\Pi^{'}(q)^2 + f^{'}(\Pi(q)+c)\,\Pi^{''}(q) = 0$$

Donc en 0, on a $\quad f^{''}(c)\,\Pi^{'}(0)^2 + f^{'}(c)\,\Pi^{''}(0) = 0 \qquad (2).$

Or $\quad \Pi'(0) > 0 \quad \stackrel{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad \forall c, \quad \dfrac{f^{''}(c)}{f^{'}(c)} = \dfrac{f^{''}(0)}{f^{'}(0)}.$

Donc sachant que f convexe,

- $\rightarrow$ soit $f^{''}(0) = 0$ alors f est linéaire;
- $\rightarrow$ soit $f^{''}(0) > 0$ alors f est exponentielle.

Proposition

Le principe de la valeur moyenne vérifie la propriété d'additivité si et seulement si

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad ou \quad f(x) = x.$$

Preuve. Considérons deux risques $S_1 \perp\!\!\!\perp S_2$.

CN) - pour $f(x) = x$: c'est trivial (par linéarité de l'espérance).

- pour $f(x) = e^{\alpha x}$: $\Pi(S_1 + S_2) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha(S_1+S_2)}]\right) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha S_1}]\,\mathbb{E}[e^{\alpha S_2}]\right) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha S_1}]\right) + \frac{1}{\alpha} \ln\left(\mathbb{E}[e^{\alpha S_2}]\right) = \Pi(S_1) + \Pi(S_2)$

CS) Soit c une constante, $S \perp\!\!\!\perp c$. Par additivité,

$$\Pi(S + c) = \Pi(S) + \Pi(c) = \Pi(S) + f^{-1}(f(c)) = \Pi(S) + c.$$

Donc on a invariance par translation, et on utilise cette propriété avec la proposition d'avant pour conclure.

Proposition

Le principe de l'utilité nulle ($u \nearrow$ et concave) vérifie la propriété d'additivité ***si et seulement si***

$$u(x) = -e^{-\alpha x} \quad ou \quad u(x) = x$$

à une relation linéaire près.

Preuve.

CN) Si $u(x) = x \;\Rightarrow\;$ évident!
Si $u(x) = -e^{-\alpha x} \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S)] = u(0) \Leftrightarrow \mathbb{E}[-e^{-\alpha(\Pi(S)-S)}] = -e^{-\alpha\Pi(S)}\,\mathbb{E}[e^{\alpha S}] = \underbrace{-1}_{u(0)} \Leftrightarrow \Pi(S) = -\frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}[e^{\alpha S}]$, qui, on le sait, est additif (c'est le principe exponentiel).

CS) Après normalisation de la fonction d'utilité, on peut toujours avoir

$$u(0) = 0, \qquad u^{'}(0) = 1, \qquad u^{''}(0) = -a \leq 0.$$

Posons $S_{q,z} = (1 - q)\,\delta_0 + q\,\delta_z$ et $\Pi(q) = \Pi(S_{q,z})$.

On a par l'utilité nulle que $\quad q\,u(\Pi(q) - z) + (1 - q)\,u(\Pi(q)) = 0.$

En dérivant par rapport à q à gauche et à droite de l'égalité puis en se plaçant en 0, on obtient

$$\underbrace{-u(0)}_{=0} + u(-z) + \Pi^{'}(0)\,\underbrace{u^{'}(0)}_{=1} = u(-z) + \Pi^{'}(0) = 0.$$

Dériver une nouvelle fois en 0 amène à

$$2\Pi'(0)\,u'(-z) - 2\Pi'(0) + \Pi''(0) - a\Pi'(0)^2 = 0.$$

Soit T_q la somme de deux variables $\perp\!\!\!\perp$ de même loi que $S_{q,z}$:

$$T_q = (1-q)^2\,\delta_0 + 2q(1-q)\,\delta_z + q^2\delta_{2z}.$$

Par additivité, on sait que

$$\Pi(T_q) = 2\Pi(q)$$

et

$$q^2\,u(2\Pi(q)-2z) + 2q(1-q)\,u(2\Pi(q)-z) + (1-q)^2\,u(2\Pi(q)) = 0.$$

Donc en dérivant 2 fois et en se plaçant en 0, on a

$$2\,u(-2z) - 4\,u(-z) + 8\,\Pi(0)\,u^{'}(-z) - 2\,\Pi^{'}(0) + 2\,\Pi^{''}(0) - 4a\,\Pi^{'}(0)^2 = 0.$$

En éliminant $\Pi^{''}(0)$ puis $\Pi^{'}(0)$, on a finalement

$$u(-2z) - 2u(-z)u^{'}(-z) - a\,u(-z)^2 = 0.$$

Finalement, **en résolvant l'équation diff.**, on obtient

- $\rightarrow$ si $a = 0$, alors $u(x) = x$;
- $\rightarrow$ si $a > 0$, alors $u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$.

Proposition

Le principe de l'utilité nulle est itératif si et seulement si

$$u(x) = -e^{-\alpha x} \quad ou \quad u(x) = x$$

à une relation linéaire près.

Preuve. Laissée au lecteur...

4 Calcul de prime et introduction aux mesures de risque

- Les principes classiques de tarification
- Propriétés souhaitables des principes de tarification
- Résumé des propriétés de chaque principe de prime
- Mesures de risque célèbres

Introduction et définition

Soit la variable aléatoire positive (v.a.p.) S du montant cumulé des sinistres d'une police pour une période de garantie donnée.

Soit $\mathbb{F}$ l'espace des fonctions de répartition (f.d.r.) des v.a.p.

Une mesure de risque est une fonction

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{R} : \quad \mathbb{F} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ F & \to & \mathcal{R}(F) \end{array}}$$

Les mesures de risque s’utilisent à de nombreux égards, parmi lesquels:

$\longrightarrow$ des calculs d’immobilisation de capital dans un objectif de solvabilité;

$\longrightarrow$ des calculs de capitaux à investir initialement à probabilité de ruine donnée;

$\longrightarrow$ le calcul de réserves IBNR (tardifs)...

Analogie: le notion de mesure de risque ressemble fortement à la notion de principe de prime. C’est le cash à mettre de côté face à l’acceptation d’un nouveau risque dans un objectif de prudence...

Propriétés souhaitables des mesures de risque

Comme pour les principes de prime, un ensemble de propriétés sont exigées car “naturelles”.

- → Invariance en loi: $S_1 \stackrel{L}{=} S_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(S_1) = \mathcal{R}(S_2)$.
- → Monotonie: $S_1 \geq S_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(S_1) \geq \mathcal{R}(S_2)$.
- → Invariance par translation: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{R}(S_1 + \lambda) = \mathcal{R}(S_1) + \lambda$.
- → Homogénéité positive: $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{R}(\lambda S_1) = \lambda \mathcal{R}(S_1)$.
- → Sous-additivité: $\mathcal{R}(S_1 + S_2) \leq \mathcal{R}(S_1) + \mathcal{R}(S_2)$.
- → Convexité:

$$\forall \beta \in [0,1],\ \mathcal{R}(\beta S_1 + (1-\beta) S_2) \leq \beta \mathcal{R}(S_1) + (1-\beta) \mathcal{R}(S_2).$$

Mesure de risque cohérente: approche axiomatique

Selon Artzner et al. (1997), une “bonne mesure de risque” doit satisfaire certains des axiomes précédents, en particulier:

- $\rightarrow$ Monotonie: $S_1 \geq S_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(S_1) \geq \mathcal{R}(S_2)$.
- $\rightarrow$ Invariance par translation: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{R}(S_1 + \lambda) = \mathcal{R}(S_1) + \lambda$.
- $\rightarrow$ Homogénéité positive: $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{R}(\lambda S_1) = \lambda \mathcal{R}(S_1)$.
- $\rightarrow$ Sous-additivité: $\mathcal{R}(S_1 + S_2) \leq \mathcal{R}(S_1) + \mathcal{R}(S_2)$.

Remarques: d’autres définitions existent. Mesure de risque monétaire, convexe...

Notion de comonotonie

Introduite dans le contexte assurantiel, cette idée représente une corrélation “totale” entre 2 v.a.r.
Les pertes S_1 et S_2 sont dites comonotones ssi ce sont des fonctions croissantes d'une même variable aléatoire réelle Z, ou

$$\forall \omega, \omega^* \in \Omega, \quad \{S_1(\omega) - S_1(\omega^*)\}\{S_2(\omega) - S_2(\omega^*)\} \geq 0$$

ou encore,

$$(S_1, S_2) \quad \stackrel{\mathcal{L}}{=} \quad \left(F_{S_1}^{-1}(U),\, F_{S_2}^{-1}(U)\right), \qquad U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

→ Intuitivement S_1 et S_2 évoluent donc dans le même sens!
→ $\mathcal{R}(S_1 + S_2) = \mathcal{R}(S_1) + \mathcal{R}(S_2)$ quand S_1 et S_2 comonotones.

La Value-at-Risk (VaR)

La plus connue: c'est le standard utilisé en finance / assurance dans le calcul des réserves de prudence préconisées par l'ACPR.

Pour un risque S, la *VaR* est définie pour un seuil $p \in (0, 1)$ comme le quantile suivant:

$$\boxed{VaR_p(S) = F_S^{-1}(p) = \inf\{s : \ \mathbb{P}(S \leq s) \geq p\}.}$$

Inconvénient: la VaR n'est pas sous-additive $\Rightarrow$ ne prend pas en compte l'effet de diversification des risques.

Dans la pratique, on considère la

- $\rightarrow$ VaR au niveau 99,9% en finance (Bâle II);
- $\rightarrow$ VaR au niveau 99,5% en assurance (Solvabilité II).

Mais...

La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente au sens d'Artzner...

La VaR ne permet pas de capter la forme de la queue de distribution du risque au-delà du quantile recherché...

$\Rightarrow$ La réglementation recommande aussi l'usage de la TVaR.

La Tail-Value-at-Risk (TVaR)

Le principal attrait de la TVaR est qu'elle permet d'intégrer l'information sur la queue de distribution (dangerosité du risque).

Pour un risque S, la *TVaR* au niveau $p \in (0, 1)$ est définie comme moyenne arithmétique des *VaR* au-delà de p:

$$\boxed{TVaR_p(S) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_t(S)\, dt.}$$

→ Peut se reécrire $\quad TVaR_p(S) = VaR_p(S) + \frac{1}{1-p} ES_p(S).$

→ La TVaR est une mesure de risque cohérente.

L'Expected Shortfall (ES)

Pour un risque S, on définit l'ES au niveau $p \in (0,1)$ comme la quantité

$$\boxed{ES_p(S) = \mathbb{E}\left[\left(S - VaR_p(S)\right)^+\right].}$$

Interprétation: c'est la prime stop-loss dans le cas où les excès au-delà de $d = VaR_p(S)$ sont réassurés.

Cette mesure de risque est *sous-additive*, et est même une mesure de risque cohérente.

La Conditional Tail Expectation (CTE)

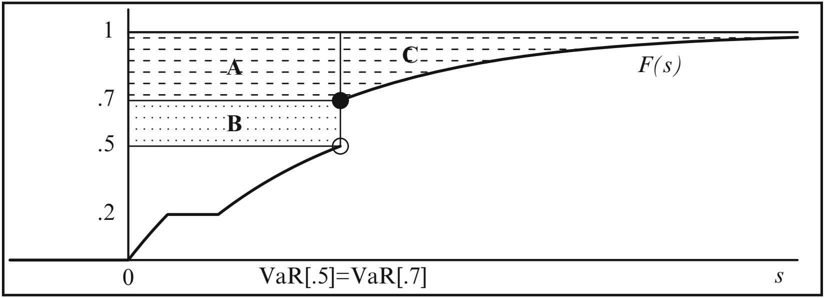
Dans le cas continu (sans saut de F_S), c'est aussi la TVaR.

Pour un risque S, la *CTE* au niveau $p \in (0,1)$ est définie comme

$$\boxed{CTE_p(S) = \mathbb{E}\left[S \,|\, S > VaR_p(S)\right].}$$

C'est donc la perte moyenne dans les $100(1-p)\%$ pires cas.
On peut la reécrire sous la forme

$$CTE_p(S) = VaR_p(S) + \frac{1}{1 - F_S(VaR_p(S))} ES_p(S).$$



Exemples:

Profil en fonction de la proba. p (croissance, dérivabilité)

Les mesures de risque de distortion

L'idée est de déformer la fonction de répartition du risque sous-jacent afin de donner plus de poids à un certain type de sinistres.

Une fonction de distortion concave accordera par exemple davantage de poids aux grands sinistres et les surpondérera.

On appelle mesure de risque de distortion le nombre

$$\mathcal{R}(F_S, G) = \int_0^1 F_S^{-1}(1-u)\, dG(u),$$

où G est une f.d.r. sur $[0,1]$ appelée fonction de distortion.

Quelques exemple de mesures de distortion

- La VaR correspond à une mesure de risque de distortion où G est un dirac.

- On peut voir l'Expected-Shortfall comme une mesure de distortion avec G la f.d.r. de la loi uniforme (pondération uniforme):

$$ES_p(S) = \int F_S^{-1}(1-u)\,\frac{1}{p}\,\mathbb{1}_{[p,1]}(u)\,du$$

- La mesure de Wang: c'est une somme pondérée de VaR !

Remarque: on peut montrer qu'une mesure de risque de distortion avec G concave est cohérente.

5 Classification et comparaison de risques

Introduction

Nous présentons ici des relations de préordre.

Elles permettent de comparer deux risques (variables aléatoires) du point de vue de leur dangerosité.

Ces risques

- $\rightarrow$ portent sur la même période,
- $\rightarrow$ admettent une distribution de probabilité.

Question: dans quel cas préfère-t-on le premier risque au second?

5. Classification et comparaison de risques
   - Comparaison à l’ordre 1
   - Comparaison à l’ordre 2
   - Application: réassurance optimale

Dominance stochastique d'ordre 1

Soient S_1 et S_2 deux v.a.r. de f.d.r. F_{S_1} et F_{S_2}, qui représentent les montants cumulés de sinistres de deux risques.

Definition

Le risque S_1 domine stochastiquement le risque S_2 à l'ordre 1, noté $S_1 \geq_{SD1} S_2$ ***si et seulement si***

$$\mathbb{E}[w(S_1)] \geq \mathbb{E}[w(S_2)],$$

pour toute fonction w croissante.

Rq: on trouve parfois la déf. avec u croissante ($w(x) = -u(-x)$):

$$-\mathbb{E}[u(-S_2)] \leq -\mathbb{E}[u(-S_1)] \qquad (\Leftrightarrow \mathbb{E}[w(S_2)] \leq \mathbb{E}[w(S_1)]).$$

La relation $S_1 \geq_{SD1} S_2$ est une relation de préordre car elle est

- $\rightarrow$ réflexive: $\quad S_1 \geq_{SD1} S_1$,
- $\rightarrow$ transitive: $\quad S_1 \geq_{SD1} S_2$ et $S_2 \geq_{SD1} S_3 \quad \Rightarrow \quad S_1 \geq_{SD1} S_3$.

Mais...

$\rightarrow$ elle n'est pas antisymétrique car si $S_1 \geq_{SD1} S_2$ et $S_2 \geq_{SD1} S_1$, alors $S_1 = S_2$ en loi mais non presque sûrement.

$\rightarrow$ elle n'est pas totale car deux risques peuvent ne pas être comparables...

Remarque: la relation $\geq_{SD1}$ peut aussi être caractérisée par les f.d.r., c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition

Le risque S_1 domine stochastiquement le risque S_2 à l'ordre 1 ***si et seulement si***

$$F_{S_2}(x) \geq F_{S_1}(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Preuve.

Remarques:

- $\rightarrow$ si $S_2 \leq_{SD1} S_1$, alors $v(S_2) \leq_{SD1} v(S_1)$ quand v croissante.
- $\rightarrow$ la relation d'ordre "*p.s.*" est : $S_2 \leq_{p.s.} S_1$ si $\mathbb{P}(S_2 \leq S_1) = 1$.

Proposition

i) Si $S_2 \leq_{p.s.} S_1$ *alors* $S_2 \leq_{SD1} S_1$.
ii) Réciproquement, si $S_2 \leq_{SD1} S_1$ *alors* $\exists S' \sim S_1$ *t.q.* $S_2 \leq_{p.s.} S'$.

Preuve. i) Evident!

ii)

Proposition

Si *S_1 et S_2 admettent des densités et s'il $\exists$ une constante $c \geq 0$ t.q.*

$$\begin{array}{rcll} f_{S_2}(x) & \geq & f_{S_1}(x) & \textit{pour } x \in [0, c[\\ f_{S_2}(x) & \leq & f_{S_1}(x) & \textit{pour } x \in [c, \infty[, \end{array}$$

Alors $S_1 \geq_{SD1} S_2$.

Preuve.

Remarque: résultat généralisable pour les distributions discrètes.

Proposition

Si *S_1 est une v.a. indépendante des risques S et $S^{'}$ t.q. $S \geq_{SD1} S^{'}$,* ***alors***

$$S + S_1 \quad \geq_{SD1} \quad S^{'} + S_1.$$

Preuve.

Proposition

Si *$S_1, ..., S_n$ et $S'_1, ..., S'_n$ sont des suites de v.a. indépendantes telles que $S_i \geq_{SD1} S'_i$ pour tout i,*
alors

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \quad \geq_{SD1} \quad \sum_{i=1}^{n} S'_i.$$

Preuve par récurrence.

Proposition

Si *$S_1, ..., S_n$ et $S_1', ..., S_n'$ sont des suites de v.a.p. $\perp\!\!\!\perp$ t.q. $S_i \geq_{SD1} S_i'$ pour tout i, et si N et N' sont deux variables de comptage $\perp\!\!\!\perp$ de (S_n) et (S_n') et telles que $N \geq_{SD1} N'$;*

alors $$\sum_{i=1}^{N} S_i \quad \geq_{SD1} \quad \sum_{i=1}^{N'} S_i'.$$

Preuve (en deux temps).

Proposition

Si S et $S^{'}$ sont deux risques tels que $S \geq_{SD1} S^{'}$, alors

$$\Pi(S) \geq \Pi(S^{'}).$$

pour les principes de la prime pure, de l'espérance mathématique, de l'utilité nulle, de la valeur moyenne et de Wang.

Preuve. - Prime pure (et espérance math.): utilisant la prop. avec les f.d.r.,

$$\Pi(S^{'}) = \mathbb{E}[S^{'}] = \int_0^\infty \bar{F}_{S'}(s)ds \overset{hyp}{\leq} \int_0^\infty \bar{F}_S(s)ds = \mathbb{E}[S] = \Pi(S).$$

- Principe de Wang: prop. avec f.d.r. $+$ fonction puissance $\nearrow$,

$$\Pi(S^{'}) = \int_0^{\infty} \left(\bar{F}_{S'}(s)\right)^r ds \overset{hyp}{\leq} \int_0^{\infty} \left(\bar{F}_S(s)\right)^r ds = \Pi(S).$$

- Principe de l'utilité nulle (pour rappel u croissante et concave) :

$$S \geq_{SD1} S^{'} \overset{def.}{\Rightarrow} \forall \Pi \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S + R)] \leq \mathbb{E}[u(\Pi(S^{'}) - S^{'} + R)] \quad (1)$$

Or $\begin{cases} \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S + R)] = u(R) \\ \mathbb{E}[u(\Pi(S^{'}) - S^{'} + R)] = u(R) \end{cases}$

donc $\quad \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S + R)] = \mathbb{E}[u(\Pi(S^{'}) - S^{'} + R)] \quad (2).$

Ainsi (1) et (2) impliquent que

$$\mathbb{E}[u(\Pi(S^{'}) - S^{'} + R)] \quad \leq \quad \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S^{'} + R)] \qquad (3).$$

Si $\Pi(S^{'}) > \Pi(S)$ alors $\mathbb{E}[u(\Pi(S^{'}) - S^{'} + R)] > \mathbb{E}[u(\Pi(S) - S^{'} + R)]$ car u est $\nearrow$. Mais ceci est en contradiction avec (3)!

Donc par l'absurde $\quad \Pi(S^{'}) \leq \Pi(S)$! $\square$

Remarque: pour certains principes de prime, on ne peut pas conclure. D'un point de vue gestion de risque, cela peut donc poser problème.

C'est le cas par exemple

- $\longrightarrow$ du principe de la variance,
- $\longrightarrow$ du principe de l'écart-type.

Exemple (principe de la variance): soit $S^{'} \sim \mathcal{B}(1, p)$ et $S = 1$ p.s.

On peut montrer que $S \geq_{SD1} S^{'}$ (en prenant par exemple $w = Id$ et en calculant les espérances), mais

$$\Pi(S) = 1 \quad < \quad \Pi(S^{'}) = p + \beta p(1 - p) \quad \text{si} \quad \beta p > 1.$$

5 Classification et comparaison de risques

- Comparaison à l’ordre 1
- Comparaison à l’ordre 2
- Application: réassurance optimale

Dominance stochastique d'ordre 2

Des notions $\neq$ sont traduites par cette relation, notamment la prise en compte des comportements d'aversion au risque.

Ceci se traduit par la concavité de la fonction u.

Definition

Le risque S_1 domine stochastiquement le risque S_2 à l'ordre 2, noté $S_1 \geq_{SD2} S_2$, ***si et seulement si***

$$\mathbb{E}[w(S_1)] \quad \geq \quad \mathbb{E}[w(S_2)],$$

pour toute fonction w croissante et convexe.

La relation est parfois notée $\geq_{r.a.}$, pour “risk aversion”.

- $\rightarrow$ cette inégalité est équivalente à $\mathbb{E}[v(-S_2)] \geq \mathbb{E}[v(-S_1)]$ où $v(x) = -w(-x)$ est croissante et concave;
- $\rightarrow$ l'ordre $\geq_{SD1}$ compare les espérances pour une classe plus large de fonctions, et inclut donc la dom. stoch. d'ordre 2;
- $\rightarrow$ 2 risques incomparables à l'ordre 1 peuvent l'être à l'ordre 2.

Definition

La transformation stop-loss de la f.d.r. F_S est définie par

$$\pi_S(y) = \mathbb{E}[(S - y)^+] \quad \forall y \geq 0.$$

Proposition

Le risque S domine stochastiquement le risque $S^{'}$ à l'ordre 2 ***si et seulement si***

$$\pi_S(y) \geq \pi_{S'}(y) \qquad \forall y \geq 0.$$

On écrit aussi $\quad S \geq_{SD2} S^{'} \quad \Leftrightarrow \quad S \geq_{sl} S^{'}.$

Preuve.

Proposition

$S \geq_{SD2} S'$ ***si et seulement si*** *$\exists$ une variable aléatoire D telle que*

$$S' + D \stackrel{d}{=} S \qquad et \qquad \mathbb{E}[D \,|\, S'] \geq 0 \ p.s.$$

Preuve.

Remarque: parfois, on dit que S' est moins variable que S.

Proposition

Si $\mathbb{E}[S^{'}] \leq \mathbb{E}[S]$ *et s'il existe une constante* $c \geq 0$ *telle que*

$$\begin{array}{lcll} F_{S'}(s) & \leq & F_S(s) & \textit{pour } s \in [0, c[\\ F_{S'}(s) & \geq & F_S(s) & \textit{pour } s \in [c, \infty[\end{array}$$

Alors $S \geq_{SD2} S^{'}$.

Preuve.

Exemple: $S' \sim \mathcal{U}_{[0,2]}$ et $S \sim \mathcal{E}xp(1)$ (ici $\mathbb{E}[S'] = \mathbb{E}[S]$).

Exercice indépendant (relation moments / prime stop-loss):
Montrer que $\forall k \geq 2, \quad \mathbb{E}[S^k] = k(k-1) \int_0^\infty s^{k-2} \pi_S(s)\, ds$,
et que si $S \geq_{SD2} S'$ alors $\mathbb{E}[S^k] \geq \mathbb{E}[S'^k] \quad \forall k \geq 2$.

Proposition

Si *S est une variable $\perp\!\!\!\perp$ des risques S_1 et $S_1^{'}$ tels que $S_1 \geq_{SD2} S_1^{'}$,* ***alors***

$$S_1 + S \quad \geq_{SD2} \quad S_1^{'} + S.$$

Preuve

Identique à l'ordre 1.

Proposition

Si *$S_1, ..., S_n$ et $S'_1, ..., S'_n$ sont des suites de v.a.p. $\perp\!\!\!\perp$ t.q. $S_i \geq_{SD2} S'_i$ pour tout i,*

alors $$\sum_{i=1}^n S_i \quad \geq_{SD2} \quad \sum_{i=1}^n S'_i.$$

Soient des proba. (p_i) t.q. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, ***alors***

$$\sum_{i=1}^n p_i F_{S_i} \quad \geq_{SD2} \quad \sum_{i=1}^n p_i F_{S'_i}.$$

Preuve. La 1ère inégalité s'obtient comme la domin. stochastique d'ordre 1 et la 2e (mélange) en utilisant déf. et prop.: l'hyp. donne

$$\Pi_{S_i}(y) \geq \Pi_{S'_i}(y) \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\mathbb{E}[(S_i - y)^+]}_{\pi_{S_i}(y)} \geq \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\mathbb{E}[(S'_i - y)^+]}_{\pi_{S'_i}(y)}.$$

Proposition

Si on a

- → $S_1, ..., S_n$ *et* $S_1^{'}, ..., S_n^{'}$ *sont des suites de v.a.p. indépendantes telles que* $S_i \geq_{SD2} S_i^{'}$ *pour tout i,*
- → *N et* $N^{'}$ *sont deux variables de comptage indépendantes de* (S_n) *et* $(S_n^{'})$ *telles que* $N \geq_{SD2} N^{'}$ *;*

Alors $$\sum_{i=1}^{N} S_i \quad \geq_{SD2} \quad \sum_{i=1}^{N^{'}} S_i^{'}.$$

Preuve.

Exemple

Prenons $N' = \mu$ *p.s. et* $N \sim \mathcal{P}(\mu)$. *Alors* $N \geq_{SD2} N'$.

Proposition

Si *S et S' sont deux risques tels que* $S \geq_{SD2} S'$,
alors $\Pi(S) > \Pi(S')$ *pour le principe de la valeur moyenne.*

Preuve.

C'est immédiat car par définition du principe de la valeur moyenne:

$$\Pi(S') < \Pi(S) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}\mathbb{E}[f(S')] \leq f^{-1}\mathbb{E}[f(S)] \quad (\text{f} \nearrow \text{ et convexe}).$$

Equivalent à $\mathbb{E}[f(S')] \leq \mathbb{E}[f(S)]$ (cf définition de la relation $\geq_{SD2}$).

Proposition

Le principe de calcul de prime vérifie les propriétés suivantes:

i) *si* $S \geq_{SD2} S'$ *et* $F_{S'} \neq F_S$, *alors* $\Pi(S) > \Pi(S')$;

ii) *si* $\mathbb{P}(S = s) = 1$, *alors* $\Pi(S) = s$;

iii) S', S_1 *et* S_2 *sont des risques et* $p \in [0, 1]$.
Si $\Pi(S_1) = \Pi(S_2)$ *alors*

$$\Pi(pF_{S_1} + (1 - p)F_{S'}) = \Pi(pF_{S_2} + (1 - p)F_{S'})$$

ssi il existe une fonction f *continue, croissante et convexe telle que* $\Pi(S) = f^{-1}\,\mathbb{E}[f(S)]$.

iv) *de plus, si on a* S *et* S' *deux risques indépendants, alors* $\Pi(S + S') = \Pi(S) + \Pi(S')$ *et alors*

$$f(x) = e^{\alpha x} \qquad ou \qquad f(x) = x.$$

Preuve. (Ebauche)

1) i) Si $S \geq_{SD2} S^{'}$, alors $\mathbb{E}[f(S^{'})] \leq \mathbb{E}[f(S)]$.
ii) Evident.
iii) On a

$$\begin{aligned} f(\Pi(pF_{S_1} + (1-p)F_{S'})) &= p\mathbb{E}[f(S_1)] + (1-p)\mathbb{E}[f(S^{'})] \\ &= p\mathbb{E}[f(S_2)] + (1-p)\mathbb{E}[f(S^{'})] \\ &= f(\Pi(pF_{S_2} + (1-p)F_{S'})). \end{aligned}$$

2) Soit $a > 0$, posons $S_{p,a} = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_a$.

On définit $\phi(p) = \Pi(S_{p,a})$. On a alors $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = a$ par ii).

Pour $p_1 < p_2$, i) donne $S_{p_2,a} \geq_{SD2} S_{p_1,a}$ et $F_{S_{p_1,a}} \neq F_{S_{p_2,a}}$, donc $\phi(p_1) < \phi(p_2)$ et ϕ est une fonction strictement croissante. On peut aussi montrer par l'absurde que ϕ est continue.

Puisque ϕ est une fonction croissante continue, posons

$$f(u) = \phi^{-1}(u) \quad \text{pour } u \in [0, a].$$

Si $u = \phi(t)$ ou $t = f(u)$,

$$\Pi(S_t) = u = \phi(t) = \Pi((1 - f(u))\delta_a + f(u)\delta_0).$$

Par iii), si $\Pi(X) = \Pi(X^{'})$ et $\Pi(Y) = \Pi(Y^{'})$, alors

$$\Pi(tF_X + (1 - t)F_Y) = \Pi(tF_{X'} + (1 - t)F_{Y'}).$$

De même on montre que

$$\text{si} \quad \Pi(F_j) = \Pi(G_j) \quad \text{alors} \quad \Pi(\sum_i p_i\, F_i) = \Pi(\sum_i p_i\, G_i).$$

Considérons maintenant la v.a. $X \in [0, a]$ t.q. $F_X(x) = \sum_j p_j \delta_{c_j}(x)$, où $0 \leq c_j \leq a$ et

$$\Pi(\delta_{c_j}) = c_j = \Pi((1 - f(c_j))\delta_a + f(c_j)\delta_0).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\Pi(X) &= \Pi\left(\sum_j p_j \delta_{c_j}\right) = \Pi\left(\sum_j p_j((1 - f(c_j))\delta_a + f(c_j)\delta_0)\right) \\
&= \Pi\left((1 - \sum_j p_j f(c_j))\delta_a + \sum_j p_j f(c_j)\delta_0\right) = \phi\left(\sum_j p_j f(c_j)\right) \\
&= f^{-1}(\mathbb{E}[f(X)]).
\end{aligned}$$

Si F_X est continue alors elle peut être encadrée par F_j^+ et F_j^- t.q. $\Pi(F_j^-) \leq \Pi(F_X) \leq \Pi(F_j^+)$; puis passe à la limite et CV monotone.

5 Classification et comparaison de risques

- Comparaison à l'ordre 1
- Comparaison à l'ordre 2
- Application: réassurance optimale

Le contrat de réassurance optimal

La question centrale ici est

Quel type de réassurance est le plus intéressant pour un assureur sachant que le montant de la prime de réassurance est fixé ?

Critères de choix

Soit S le montant du sinistre que l'assureur doit couvrir.

Supposons que les traités de réassurance satisfont certaines caractéristiques: la *part cédée au réassureur* doit être

→ continue et non-négative,

→ non décroissante,

→ augmente moins vite que le montant des sinistres.

Plus précisément, c'est un élément de

$$\boxed{\mathcal{I} = \{I(.) \,|\, I(0) = 0\ ;\ 0 \leq I^{'}(s) \leq 1\}.}$$

Des contrats type appartenant à $\mathcal{I}$ sont

→ la quote-part: $I(s) = \alpha s$, pour un $\alpha \in [0, 1]$;

→ le stop-loss (S: montant agrégé) ou l'excédent de sinistre par risque (S: montant individuel): $I(s) = (s - d)^+$, pour un $d > 0$.

Supposons que l'assureur décide du montant P à allouer pour sa réassurance. Il choisit ainsi un contrat dans l'ensemble

$$\boxed{\mathcal{I}_P = \{I(.) \in \mathcal{I} \mid \Pi_r(I(S)) = P\},}$$

où Π_r est le principe de calcul de prime du réassureur et P est inférieur à la prime d'assurance.

L'assureur considère le montant du sinistre après réassurance:

$$\boxed{Z = S - I(S).}$$

Il optimise certaines caractéristiques de cette variable, son critère noté c dépend donc de la distribution de Z.
Nous supposerons que l'assureur minimise $c(F_Z)$ sur $\mathcal{I}_P$.

Rq: un certain nb de critères d'optimisation conduisent à des préférences cohérentes avec l'ordre $\geq_{SD2}$, donc de la variabilité.

Dans la pratique: avec ces critères, un sinistre après réassurance est préféré s'il est inférieur au sens de l'ordre $\geq_{SD2}$ (ou stop-loss).

Definition

Si *la propriété suivante est vérifiée:* $\forall I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ *avec* $Z_i = S - I_i(S)$,

$$Z_1 \leq_{SD2} Z_2 \quad \Rightarrow \quad c(F_{Z_1}) \leq c(F_{Z_2}),$$

Alors *on dit que le critère d'optimisation* c *préserve l'ordre de variabilité sur l'ensemble* $\mathcal{I}$.

Caractérisation: d'après la définition de la dominance stochastique d'ordre 2, on peut conclure qu'un critère qui préserve l'ordre de variabilité peut s'écrire sous la forme

$$c(F_Z) = \mathbb{E}[v(Z)],$$

où v est croissante et convexe.

Exemples de critères d'optimisation (pour l'assureur) préservant l'ordre de variabilité.

$\longrightarrow$ Maximisation de l'utilité espérée du résultat net (prime d'assurance et réassurance fixées):

$$\boxed{c(F_Z) = -\mathbb{E}[u(\Pi(S) - P - Z)],}$$

où

- u est la fonction d'utilité de l'assureur (croissante et concave),
- $\Pi(S)$ est la prime d'assurance pour le montant du sinistre initial S,
- P est la prime de réassurance identique pour toutes les formes de contrat,
- et Z est le montant du sinistre après réassurance.

→ Minimisation de la variance de la part conservée du sinistre sous contrainte d'égalité des moyennes.

Rappelons la transformation stop-loss sur le risque Z :

$$\pi_Z(y) = \mathbb{E}[(Z-y)^+] = \int_y^\infty (z-y)\,dF_Z(z) = \int_y^\infty \bar{F}_Z(z)\,dz,$$

qui permet de comparer très facilement les moments puisque

$$\mathbb{E}[Z^k] = k(k-1)\int_0^\infty z^{k-2}\pi_Z(z)\,dz, \quad k \geq 2.$$

On sait que $\quad Z_1 \leq_{SD2} Z_2 \;\Rightarrow\; \pi_{Z_1}(z) \leq \pi_{Z_2}(z), \quad$ donc

$$Z_1 \leq_{SD2} Z_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z_1^k] \leq \mathbb{E}[Z_2^k] \qquad (k \geq 2)$$

Sous contrainte $\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2]$, on a donc $Z_1 \leq_{SD2} Z_2$ implique

$$Var(Z_1) = \mathbb{E}[Z_1^2] - (\mathbb{E}[Z_1])^2 \quad \leq \quad \mathbb{E}[Z_2^2] - (\mathbb{E}[Z_2])^2 = Var(Z_2).$$

Si l'on suppose par exemple que le principe de calcul de prime du réassureur est celui de l'espérance mathématique ($\Pi_r(I(S)) = (1+\beta)\,\mathbb{E}[I(S)]$), alors $\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2]$,

($Z_i = S - I_i(S)$) et l'on peut poser

$$\boxed{c(F_Z) = Var(Z) = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2].}$$

$w(Z) = (Z - \mathbb{E}[Z])^2 \nearrow$ convexe dc répond à la caractérisation.

→ Minimisation de la prime d'assurance: l'assureur préfère retenir un risque après réassurance pour lequel il fera payer lui-même la plus petite prime à son assuré.

La prime $\Pi(X)$ demandée à l'assuré est la somme des primes de l'assureur $\Pi(Z)$ et du réassureur P:

$$\boxed{\Pi(X) = P + \Pi(Z).}$$

Puisque P est fixée, minimiser $\Pi(X)$ revient à minimiser $\Pi(Z)$.

En posant un critère $c(F_Z) = \Pi(Z)$, il faut choisir un principe de calcul de prime cohérent avec la relation $\geq_{SD2}$: par ex.,

a) la prime pure: $\Pi(Z) = \mathbb{E}[Z]$;
b) l'espérance mathématique: $\Pi(Z) = (1+\beta)\,\mathbb{E}[Z]$;

c) la variance: $\Pi(Z) = \mathbb{E}[Z] + \beta Var(Z)$ (sous la contrainte que le réassureur utilise l'espérance math.);
d) l'écart-type (idem que c);

e) princ. exponentiel: $\Pi(Z) = \alpha^{-1} \ln \mathbb{E}[e^{\alpha Z}]$ (exp. $\nearrow$ convexe);
f) la valeur moyenne: $\Pi(Z) = f^{-1}\mathbb{E}[f(Z)]$, avec f convexe, $\nearrow$;

g) l'utilité nulle: $\mathbb{E}[u(\Pi(Z) - Z)] = u(0)$.

En effet: $\quad Z_1 \leq_{SD2} Z_2,\ \forall \Pi \ \Rightarrow\ \mathbb{E}[u(\Pi - Z_2)] \leq \mathbb{E}[u(\Pi - Z_1)]$.
Donc

$$\mathbb{E}[u(\Pi(Z_1) - Z_1)] = \mathbb{E}[u(\Pi(Z_2) - Z_2)] \quad \Rightarrow \quad \Pi(Z_1) \leq \Pi(Z_2).$$

→ Minimisation de la probabilité de ruine: l'assureur choisit son risque de manière à diminuer sa probabilité de ruine:

$$\boxed{c(F_Z) = \psi_Z(u),}$$

où u sont les **fonds propres initiaux**.

On se place aussi sous la contrainte d'égalité des moyennes

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2],$$

i.e. le principe de calcul du réassureur est celui de l'espérance mathématique.

En effet, $$\left.\begin{array}{l} Z_1 \leq_{SD2} Z_2 \\ \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2] \end{array}\right\} \overset{\textit{slide } 302}{\Longrightarrow} \psi_{Z_1}(u) \leq \psi_{Z_2}(u)$$

$\longrightarrow$ Maximisation du coefficient de Lundberg (cf plus loin).

De même,
$$\left.\begin{array}{l} Z_1 \leq_{SD2} Z_2 \\ \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad R_{Z_1} \geq R_{Z_2}$$

et on peut choisir
$$\boxed{c(F_Z) = -R_Z.}$$

Theorem

Soit S un risque, I_1 et I_2 deux contrats de réassurance dans $\mathcal{I}$ avec

$$\mathbb{E}[I_1(S)] \geq \mathbb{E}[I_2(S)].$$

Si $\exists c \geq 0$ *tel que*

- $I_1(s) \leq I_2(s)$ *pour* $0 \leq s \leq c$,
- $I_1(s) \geq I_2(s)$ *pour* $s > c$,

Alors

$$Z_1 \leq_{SD2} Z_2,$$

où Z_1 et Z_2 sont les deux montants de sinistres après réassurance.

Preuve.

Le contrat de réassurance optimal pour l'assureur

Le choix du type de contrat de réassurance est fonction de deux paramètres:

- $\longrightarrow$ le principe de calcul de prime du réassureur,
- $\longrightarrow$ le critère d'optimisation de l'assureur.

Cas 1: Π_r est le principe de l'espérance mathématique et le critère de minimisation est cohérent avec l'ordre de variabilité.

L'ensemble des contrats se réduit à (β: chargement de sécurité)

$$\boxed{\mathcal{I}_P = \{I(.) \in \mathcal{I} \mid (1+\beta)\,\mathbb{E}[I(S)] = P\}.}$$

Theorem

Pour tout critère d'optimisation préservant l'ordre de variabilité, le traité de réassurance optimal sur l'ensemble $\mathcal{I}_P$ est de la forme

$$I_d(s) = (s - d)^+,$$

où d est tel que $(1+\beta)\,\mathbb{E}[I_d(S)] = P$.

Preuve.

Cadre du modèle collectif en assurance

Considérons maintenant un modèle collectif, avec des montants de sinistres individuels X_i i.i.d.

Supposons que le contrat de réassurance doit être de la forme

$$T(n, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} I(x_j), \quad \text{avec } I \in \mathcal{I}_{P/\mathbb{E}[N]},$$

où n est la réalisation de la v.a. N.

Dans ce cas,

$$\boxed{(1+\beta)\,\mathbb{E}[T(S)] = P = (1+\beta)\,\mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[I(X)].}$$

Theorem

(Réassurance optimale par sinistre). Pour tout critère d'optimisation préservant l'ordre de variabilité, le contrat de réassurance optimal sur l'ensemble $\mathcal{I}_P$ est donné par

$$T(n, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - d)^+ = \sum_{j=1}^{n} I_d(x_j)$$

avec d tel que $\mathbb{E}[(X_1 - d)^+] = \frac{P}{(1+\beta)\mathbb{E}[N]}$.

Preuve (analogie avec le résultat précédent).
∀ risque individuel, le contrat I_d est optimal, le risque retenu est moins variable que tout autre risque retenu. Puisque la dominance stoch. d'ordre 2 est stable par composition, il en est de même pour le risque agrégé. Le contrat optimal est donc un EoL par risque.

Cas 2: Π_r est le principe de la variance et le critère d'optimisation est le critère de la moyenne-variance du résultat net.

L'ensemble des contrats se réduit à

$$\boxed{\mathcal{I}_P = \{I(.) \in \mathcal{I} \,|\, \mathbb{E}[I(S)] + \beta Var(I(S)) = P\},}$$

où β est un coefficient de chargement de sécurité.

Theorem

Supposons que le critère d'optimisation est la moyenne-variance du résultat net (après réassurance), le contrat de réassurance optimal sur l'ensemble $\mathcal{I}_P$ a la forme $I_\alpha(s) = \alpha s$, où α est tel que

$$\mathbb{E}[\Pi_r(I_\alpha(S))] = P.$$

Preuve.

6 Théorie de la ruine

Introduction

L'objectif de cette partie est d'étudier le processus de richesse d'une companie d'assurance au cours du temps:

- $\rightarrow$ augmente au cours du temps avec la collecte des primes;
- $\rightarrow$ diminue lors de remboursement de sinistres.

Lorsqu'il devient négatif, on parle de ruine.

Rq: c'est une ruine "mathématique". L'assureur peut faire appel à ses actionnaire, emprunter, consommer ses fonds propres...

Une ruine économique serait une situation comptable dans laquelle la companie ne peut plus faire face à ses engagements.

Le modèle de Lundberg

Modèle proposé par Lundberg dans sa thèse de doctorat en 1903.

Son modèle est caractérisé par cinq composantes:

1. les sinistres : les montants de sinistres (X_k) sont positifs et i.i.d., de distribution commune F_X (avec la densité associée f_X), et de moyenne $\mu = \mathbb{E}[X_1]$.

2. la survenance des sinistres : les sinistres arrivent à des moments aléatoires

$$0 < T_1 < T_2 < ... \text{ p.s.}$$

3. le processus de survenance : le nombre de sinistres dans l'intervalle $[0, t]$ est noté

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 \; : \; T_n \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Equivalence des événements $\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$.

4. Les durées inter-sinistres : i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

On note ces durées

$$Y_1 = T_1, \quad Y_2 = T_2 - T_1, \quad ..., \quad Y_k = T_k - T_{k-1}$$

5. Les suites (X_k) et (Y_k) sont indépendantes entre elles.

Une conséquence des 2ème, 3ème et 4ème points est que

$$\boxed{(N(t))_{t\geq 0} \text{ est un processus de Poisson homogène d'intensité } \lambda > 0.}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Ainsi, $\quad \forall t, \quad N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t).$

Propriété:

Le processus de Poisson est un processus markovien tel que $N(0) = 0$, et $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Preuve.

Proposition

Si $N(t)$ est un processus de comptage qui vérifie les propriétés :

1 $N(t)$ *est un processus à accroissements indépendants,*

2 $N(t)$ *est un processus à accroissements stationnaires,*

3-1 $\mathbb{P}$(*il y a plus d'un sinistre à un moment donné*) $= 0$, *ou*

3-2 $\mathbb{P}$(*infinité de sinistres sur un intervalle de longueur* $\neq 0$) $= 0$,

Alors $N(t)$ *suit une loi de Poisson pour tout* t.

Preuve. En exercice.

Rq: le processus des pertes agrégées $(S(t))_{t\geq 0}$ du portefeuille

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{si} \quad N(t) > 0, \\ 0 & \text{si} \quad N(t) = 0. \end{cases} \qquad \text{est Poisson composé.}$$

Ce processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

La probabilité de ruine

Le processus de richesse de l'assureur à la date t vaut:

$$\boxed{U(t) = u + ct - S(t)}$$

Ce processus est aussi appelé processus de réserve, processus de risque ou "surplus" de l'assureur.

Hypothèses:

$\rightarrow$ les revenus de l'assureur sont linéaires: crédible s'il y a beaucoup d'assurés, qui paient leur prime de manière équi-répartie au cours du temps;

- $\longrightarrow$ les sinistres gardent la même distribution au cours du temps: on néglige l'inflation monétaire, ou la déviation de certains paramètres de la loi sous-jacente;
- $\longrightarrow$ on ne tient pas compte des intérêts dégagés par le placement des primes collectées sur les marchés financiers.

Rq: en réalité les intérêts des primes placées permettent à l'assureur de survivre, autant que la mutualisation induite par la LGN (particulièrement dans les branches à développement long)!

Voici une trajectoire typique d'un processus de risque dans le modèle de Cramer-Lundberg :

Au $5^{\text{ème}}$ sinistre, les sinistres cumulés $(X_1 + ... + X_5)$ sont $>$ aux fonds propres plus primes perçues $u + c(Y_1 + ... + Y_5)$: il y a ruine.

Definition

La probabilité de ruine sur un horizon de temps fini est

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \textit{ pour un } t \leq T),$$

avec $u \geq 0$ *et* $0 < T < \infty$.
En horizon infini, on écrit

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \qquad u \geq 0.$$

La durée avant la ruine en horizon fini vaut

$$\tau_u(T) = \inf\{t \; : \; 0 \leq t \leq T, \quad U(t) < 0\},$$

avec $0 < T \leq \infty$.
Nous écrirons $\tau_u = \tau_u(\infty)$ *pour un horizon infini.*

Proposition

$$\frac{U(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} c - \lambda\mu \qquad p.s.,$$

avec $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ *et* λ *paramètre du processus de Poisson.*

Preuve.

Remarquons aussi que $\mathbb{E}\left[\frac{U(t)}{t}\right] \to c - \lambda\mu$: c'est une sorte de LGN pour le processus $(U(t))_{t\geq 0}$.

La condition de profit net du modèle de Lundberg s'écrit

$$c > \lambda\mu \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0}.$$

Alors $U(t) \xrightarrow{p.s.} \infty$: certaines trajectoires peuvent conduire à la ruine, mais cela n'a pas lieu avec probabilité 1 à horizon infini. C'est donc aussi une condition de non-ruine ($\psi(u) < 1$).

Vocabulaire: ρ est appelé coefficient de chargement de sécurité. C'est une prime de risque destiné à éviter une ruine certaine.

Ainsi, le montant des primes perçues sur la période $[0, t]$ vaut

$$ct = (1+\rho)\lambda\mu\, t = (1+\rho)\,\mathbb{E}[S(t)].$$

On pense immédiatement au principe de prime de l'espérance, sauf que ici ρ peut dépendre des caractéristiques du processus... (attention donc!)

Il existe plusieurs façons de calculer la probabilité de ruine, ou d'en donner des majorants:

- $\rightarrow$ la formule de convolée de Beeckman,
- $\rightarrow$ les équations intégro-différentielles,
- $\rightarrow$ la théorie des martingales,
- $\rightarrow$ ...

Introduisons L la perte maximale du montant agrégé :

$$\boxed{L = \max_{t \geq 0}\{S(t) - ct\}}.$$

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ pour un } t \geq 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(U(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \geq 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(u \geq S(t) - ct \text{ pour tout } t \geq 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(u \geq L) = \mathbb{P}(L > u) = 1 - F_L(u).
\end{aligned}$$

Comme $\psi(0) < 1$ sous la condition de profit net, on en déduit que

$$\psi(0) = 1 - F_L(0^+) < 1.$$

$\Rightarrow$ L : mélange d'un dirac en 0 (avec proba. $(1 - \psi(0))$) et d'une loi continue (avec proba. $\psi(0)$).

Voici un résultat central de la théorie de la ruine:

Theorem

Le montant agrégé de la perte maximale a une distribution géométrique composée donnée par

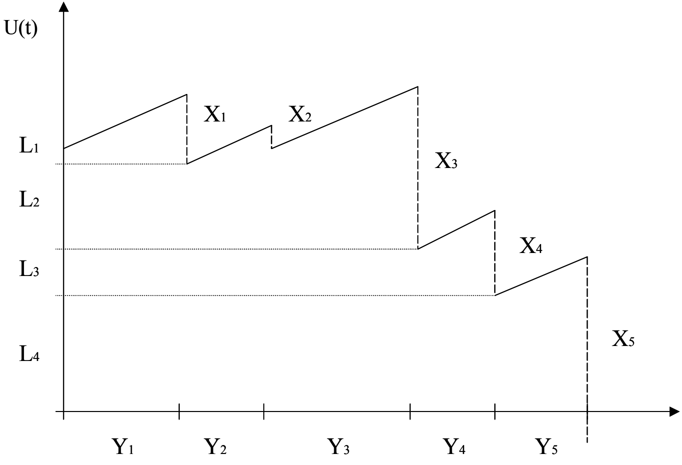
$$L = \sum_{i=1}^{M} L_i,$$

avec $\mathbb{P}(M = m) = (1 - \psi(0))(\psi(0))^m, \quad L_1 \stackrel{d}{=} S(t_0) - ct_0$ *et* $t_0 = \inf\{t \,:\, S(t) - ct > 0\}$.

De plus,

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\rho} \qquad et \qquad 1 - F_{L_1}(x) = \frac{1}{\mu}\int_x^{\infty} (1 - F_X(u))\, du.$$

Preuve. Sur la figure suivante on voit que la perte agrégée est l'addition des montants L_1 à L_4, les différences entre le précédent et le nouveau niveau le plus bas. Ce sont les "records en bas".



M est alors le nombre de records. Nous pouvons calculer

$$\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(\text{réserves nulles et pas de ruine}) = 1 - \psi(0).$$

Ensuite, on utilise la procédure suivante pour $M \geq 1$.

1. Après un record, on prend un niveau des réserves égal à la $\sum$ des records précédents. On le ramène à 0 pour retrouver une proba de ruine classique avec des réserves $= 0$.
2. Puisque le processus de Poisson a des incréments $\perp\!\!\!\perp$ et stationnaires, la proba que le processus de risque atteigne un nouveau record en bas est égale à la probabilité de ruine avec un capital de départ initial nul.

   D'où après m records,

$$M \sim \mathcal{G}(\psi(0)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(M = m) = (\psi(0))^m (1 - \psi(0)).$$

3. Déterminons maintenant la loi des L_i. Posons

$$G(u,y) = \mathbb{P}(\tau_u < \infty,\ U(\tau_u) \in]-\infty, -y[,\ U(0) = u),$$

et montrons que

$$\frac{\partial G(u,y)}{\partial u} = \frac{\lambda}{c}\left[G(u,y) - \int_0^u G(u-x,y)\, dF_X(x) - \bar{F}_X(u+y)\right].$$

Pour cela, décalons le pb de 0 en dt:

- $\rightarrow$ avec proba $(1-\lambda dt)$: pas de sinistre, réserves $= u + c\, dt$.
- $\rightarrow$ avec proba λdt : un sinistre de montant $X = x$:
  - si $x \leq u$: pas de ruine, réserves $= u + cdt - x$;
  - si $u \leq x \leq u + y$: ruine, mais cela ne répond pas aux conditions;
  - si $x > u + y$: ruine, dont l'intensité est donnée par x.

On en déduit que pour *dt* petit :

$$G(u,y) = (1-\lambda dt)G(u+cdt,y)+\lambda dt\left[\int_0^u G(u+cdt-x,y)\,dF_X(x) + \int_{u+y}^{\infty} dF_X(x)\right]+o(dt).$$

On obtient le résultat avec la définition de la dérivée partielle,

$$\frac{\partial G(u,y)}{\partial u} = \lim_{dt\to 0} \frac{G(u+cdt,y) - G(u,y)}{c\,dt}.$$

Montrons maintenant que

$$G(z,y)-G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^z G(u,y)(1-F_X(z-u))\,du - \int_y^{z+y}(1-F_X(u))\,du\right].$$

Nous avons tout d'abord que $\left[\frac{\partial G(u,y)}{\partial u}\right]_0^z = G(z,y) - G(0,y).$

Puis

$$\int_0^z \int_0^u G(u-x,y)\,dF_X(x)\,du = \int_0^z \int_0^{z-v} G(v,y)\,dF_X(w)\,dv,$$

avec le changement de variable

$$\left\{\begin{array}{ccc} v & = & u-x, \\ w & = & x. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 0 & < & v < z, \\ 0 & < & w < z-v. \end{array}\right.$$

D'où

$$\int_0^z \int_0^u G(u-x,y)\,dF_X(x)\,du = \int_0^z G(v,y)F_X(z-v)\,dv.$$

D'autre part,

$$\int_0^z \int_{u+y}^{\infty} dF_X(x)\, du = \int_0^z (1 - F_X(u+y))\, du = \int_y^{z+y} (1 - F_X(v))\, dv.$$

En prenant les deux parties, on obtient le résultat et on en déduit

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_y^{\infty} (1 - F_X(u))\, du.$$

On montre par CV dominée que $G(z, y) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ De plus, (admis)

$$\begin{aligned}
\int_0^z G(u, y)(1 - F_X(z - u))\, du \quad &= \quad \int_0^{z/2} G(u, y)(1 - F_X(z - u))\, du \\
&\qquad + \int_{z/2}^{z} G(u, y)(1 - F_X(z - u))\, du \\
&\leq \quad \frac{z}{2}\left(1 - F_X\left(\frac{z}{2}\right)\right) + \frac{z}{2} G\left(\frac{z}{2}, y\right) \quad \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'où la probabilité de ruine avec des réserves initiales nulles

$$\psi(0) = G(0,0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F_X(u))\,du = \frac{\lambda}{c}\left([x(1 - F_X(x))]_0^\infty + \int_0^\infty xF_X(x)\,dx\right) = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

De même la distribution de L_1 se caractérise par

$$\begin{aligned} 1 - F_{L_1}(y) &= \mathbb{P}(L_1 > y) = \frac{G(0,y)}{\psi(0)} = \frac{G(0,y)}{G(0,0)} \\ &= \frac{1}{\mu}\int_y^\infty (1 - F_X(u))\,du \\ \text{et}\quad f_{L_1}(x) &= \frac{1}{\mu}(1 - F_X(x)), \end{aligned}$$

puisque $G(0,y) = \mathbb{P}(\text{il y a ruine et } L_1 > y) = \psi(0)\,\mathbb{P}(L_1 > y)$. ■

On obtient sous la condition de profit net la formule de convolution de Beeckman (approchable par l'algorithme de Panjer)

$$\boxed{\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^m \bar{F}_{L_1}^{*m}(u)},$$

car

$\rightarrow \quad \psi(u) = 1 - F_L(u),$

$\rightarrow \quad L = \sum_{i=1}^{M} L_i,$

$\rightarrow \quad \psi(0) = \frac{1}{1+\rho}.$

6 Théorie de la ruine

- Le modèle de Lundberg
- La probabilité de ruine
- Probabilité de ruine et distributions à queue fine
- Distributions à queue épaisse
- Etude du phénomène de ruine

Probabilité de ruine et distributions à queue fine

Supposons ici qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel la transform. de Laplace de la loi du montant des sinistres est définie:

$$\exists r > 0, \qquad M_{X_1}(r) < \infty.$$

C'est une caractérisation des distributions à queue fine.

Exemples:

- $\rightarrow$ la loi exponentielle,
- $\rightarrow$ la loi Gamma.

Dans certains cas, on peut donner explicitement la proba de ruine.

Exemple.

Transformée de Laplace de la probabilité de ruine

Quand on ne peut pas calculer explicitement la proba. de ruine, on peut obtenir sa forme par inversion de la transformée de Laplace.

Theorem

Soit L le montant agrégé de la perte maximale, alors

$$M_L(r) = \frac{(1 - \psi(0))\mu r}{\mu r - \psi(0)(M_X(r) - 1)}.$$

La transformée de Laplace de la probabilité de ruine est donnée par

$$\int_0^\infty e^{ru}\psi(u)\,du = \frac{1}{r}[M_L(r) - 1].$$

Preuve.

Déterminons la f.g.m. de L (ss l'hyp. que X en ait une)

$$M_L(r) = M_M(\ln M_{L_1}(r)) = \frac{1-\psi(0)}{1-\psi(0)M_{L_1}(r)},$$

$$\begin{aligned}\text{où } M_{L_1}(r) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{ry}(1-F_X(y))\,dy \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\left[\frac{e^{ry}-1}{r}(1-F_X(y))\right]_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{e^{ry}-1}{r}\right) dF_X(y)\right) \\ &= \frac{1}{r\mu}(M_X(r)-1).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_L(r) &= \frac{1-\psi(0)}{1-\frac{\psi(0)}{\mu r}(M_X(r)-1)} = \frac{1-\psi(0)}{1-\frac{\lambda}{cr}(M_X(r)-1)} \\
&= \frac{(1-\psi(0))\mu r}{\mu r-\psi(0)(M_X(r)-1)}.
\end{aligned}
$$

Enfin,

$$
\begin{aligned}
M_L(r) &= \int_0^\infty e^{ru}\, dF_L(u) = 1-\psi(0) + \int_0^\infty e^{ru}\, d(1-\psi(u)) \\
&= 1-\psi(0) - \int_0^\infty e^{ru}\psi^{'}(u)\, du \\
&= 1-\psi(0) - [e^{ru}\psi(u)]_0^\infty + r\int_0^\infty e^{ru}\psi(u)\, du \\
&= 1 + r\int_0^\infty e^{ru}\psi(u)\, du \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exemples

Coefficient d'ajustement et majoration de la proba de ruine

Nous avons vu qu'il était souvent difficile de fournir une forme explicite de la probabilité de ruine.

Une idée consiste à en donner un majorant. Introduisons le coef. d'ajustement, noté R, solution de l'équation d'ajustement

$$\boxed{1 + \frac{c}{\lambda} r = \mathbb{E}(e^{rX_1}) = M_{X_1}(r).}$$

Cette équation en r admet une solution non nulle car la droite d'équation $1 + (c/\lambda)\, r$ a une pente plus grande que la dérivée en 0 de $M_{X_1}(r)$ d'après la condition de profit net, et M_{X_1} est convexe.

Exemple

Supposons que $X_1 \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$*, alors* R *vérifie*

$$1 + \frac{c}{\lambda} R = \frac{\alpha}{\alpha - R}.$$

Ainsi,

$$\frac{\lambda}{c} = \alpha - R$$

Donc

$$R = \alpha - \frac{\lambda}{c} = \alpha - \frac{1}{\mu(1+\rho)} = \alpha\left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right) = \frac{\rho\alpha}{1+\rho}.$$

Theorem

Dans un modèle de Lundberg avec des fonds propres initiaux u, la probabilité de ruine est majorée par

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Plus précisément, on a

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-R\,U(\tau_u)}\,|\,\tau_u < \infty]}.$$

Preuve.

Proposition

La probabilité de ruine est asymptotiquement de la forme

$$\psi(u) \sim C\, e^{-Ru},$$

avec

$$C = \left[\frac{R}{\rho\mu}\int_0^\infty x e^{Rx}\bar{F}_X(x)\,dx\right]^{-1}.$$

De plus la limite asymptotique de la densité de l'intensité de la ruine est

$$\frac{R}{\rho\mu}\int_0^\infty e^{Rx}\bar{F}_X(y+x)\,dx$$

Preuve.

Ordre stochastique et probabilité de ruine

Proposition

Considérons deux processus de risque Poisson-composée avec

- → *un paramètre de Poisson identique,*
- → *des distributions des sinistres X et Y tels que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$,*
- → *des proba. de ruine $\psi_X(u)$ et $\psi_Y(u)$,*
- → *des taux de prime instantanés identiques.*

Alors

$$\begin{aligned} X \leq_{SD2} Y \quad &\Rightarrow \quad \psi_X(u) \leq \psi_Y(u), \\ X \leq_{SD2} Y \quad &\Rightarrow \quad R_X \geq R_Y. \end{aligned}$$

Preuve.

Impact de la réassurance prop. sur la proba. de ruine

Le modèle de Lundberg ne met en jeu qu'un seul type de risque. La quote-part ou l'excédent de plein apporte ici la même couverture, à savoir un taux de rétention de l'assureur valant α.

Soit γ le taux de commission. Voici la nv équation d'ajustement :

$$\boxed{1 + \frac{(\alpha + \gamma(1-\alpha))\, c}{\lambda} R_r = \mathbb{E}[e^{R_r \alpha X_1}] = M_{X_1}(\alpha R_r).}$$

$\rightarrow$ Si $\gamma = 0$, le nouveau coefficient d'ajustement vaut $R_r = \frac{R}{\alpha}$;

$\rightarrow$ Si $\gamma > 0$, le nouveau coefficient d'ajustement satisfait $R_r > \frac{R}{\alpha}$.

$\psi(u) \searrow$ exponentiellement avec l'inverse du taux de rétention.

Impact de la réassurance non-proportionnelle sur R

Soit un contrat en excédent de sinistre avec priorité P et portée illimitée. Pour chaque sinistre, l'assureur conserve $\min(X_i, P)$. Soit $q(P)$ le taux de prime du contrat EoL.

Le coefficient d'ajustement est la solution strictement positive de

$$\boxed{1 + \frac{(1 - q(P))\,c}{\lambda} R_r = \int_0^P e^{R_r x} dF_X(x) + e^{R_r P}(1 - F_X(P)).}$$

En général, il n'existe **pas de solution explicite**.

Rq: si le réassureur utilise le même principe de prime que l'assureur, on montre que $R_r > R$.

Distributions à queue épaisse et assurance

Soit un portefeuille d'assurance de n risques (n déterministe)

- $\rightarrow$ chaque risque i est de loi $S_i \sim \textit{Pareto}(\alpha, 1)$, avec $\alpha > 1$;
- $\rightarrow$ chaque risque a une espérance finie donnée par $(\alpha - 1)^{-1}$.

On cherche la valeur de la prime pure par la moyenne empirique

$$\boxed{\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i}$$

Cet estimateur est naturellement sans biais et CV (LGN) vers

$$\mathbb{E}[S_i] = (\alpha - 1)^{-1}.$$

Supposons savoir que $S_n^{max} = \max_{1 \leq i \leq n} S_i$ est $< M$ (constante).

Question: quelle est alors l'espérance de la moyenne empirique?

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_n \,|\, S_n^{max} \leq M] \quad =$$

$$=$$

$$=$$

L'erreur relative est donnée par

$$\frac{\mathbb{E}[\hat{\mu}_n \,|\, S_n^{max} \leq M] - (\alpha - 1)^{-1}}{(\alpha - 1)^{-1}} = -\alpha \frac{(1 + M)^{-(\alpha-1)} - (1 + M)^{-\alpha}}{1 - (1 + M)^{-\alpha}}.$$

Choisissons M tel que

$$\mathbb{P}(S_n^{max} \le M) = p = (\mathbb{P}(S_1 \le M))^n = (1 - (1+M)^{-\alpha})^n, \quad p \in]0,1[,$$

et exprimons l'erreur relative à l'aide de p:

$$\frac{\mathbb{E}[\hat{\mu}_n \,|\, S_n^{max} \le M] - (\alpha - 1)^{-1}}{(\alpha - 1)^{-1}} = -\alpha \frac{(1 - p^{1/n})^{-(\alpha-1)/\alpha} - (1 - p^{1/n})}{p^{1/n}}.$$

A titre d'illustration, le tableau suivant donne les erreurs relatives pour $p = 0,99$ et $n = 1000$:

α	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,4	1,5
Erreur	-60,7%	-38,6%	-25,6%	-17,6%	-12,5%	-9,1%	-5,2%	-3,2%

Quelques remarques:

$\rightarrow$ en assurance incendie, on a souvent $1 < \alpha < 1,5$;

$\rightarrow$ $n = 1000 \Rightarrow$ la LGN peut s'appliquer;

$\rightarrow$ $p = 0,99$: tient compte des grandes valeurs de l'échantillon

Mais

- si $\alpha = 1,25$ (queue épaisse): la prime pure calculée sous-estime de plus de 12% en moyenne la valeur théorique dans 99% des cas;
- c'est une erreur importante;
- attention donc aux procédures usuelles d'estimation des primes: elles doivent être corrigées...

Réassurance et distributions “dangereuses”

Une autre manière de considérer la dangerosité d’une distribution consiste à regarder l’espérance résiduelle.

Exemple: un assureur réassure un risque S par un EoL de priorité M et de portée illimitée. Sa prime pure de réassurance vaut

$$\Pi_r(M) = \mathbb{E}[(S-M)^+] = \mathbb{E}[(S-M)\,\mathbb{1}_{\{S>M\}}] = \mathbb{P}(S > M)\,\mathbb{E}[S-M \,|\, S > M]$$

→ la proba. de toucher le traité (fréq. d’occurence): $\mathbb{P}(S > M)$

→ le montant moyen résiduel du sinistre une fois le traité déclenché: $e(M) = \mathbb{E}[S - M \,|\, S > M]$.

A fréquence d'occurence fixée, on peut donc avoir des charges sinistres très différentes selon le comportement de $e(M)$ lorsque M devient très grand.

Ceci dépend de la distribution de S...

$\rightarrow$ $S \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(S > s) = \exp(-\lambda\, s) \qquad\qquad e(M) = \frac{1}{\lambda}$$

$\rightarrow$ $S \sim \mathcal{G}amma(\alpha,\beta)$:

$$\mathbb{P}(S > s) = \int_s^\infty \beta^\alpha\, x^{\alpha-1}\, \frac{e^{-\beta\, x}}{\Gamma(\alpha)}\, dx \qquad\qquad e(M) \simeq \frac{1}{\beta}$$

$\rightarrow$ $S \sim \mathcal{W}eibull(\tau, 1)$:

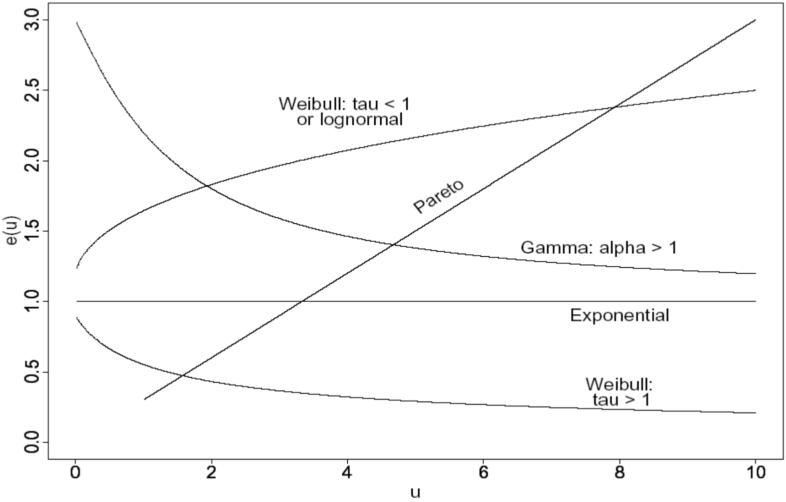
$$\mathbb{P}(S > s) = \exp(-x^{\tau}) \qquad\qquad e(M) = M^{1-\tau}$$

$\rightarrow$ $S \sim \mathcal{P}areto(\alpha, 1)$:

$$\mathbb{P}(S > s) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\alpha} \qquad\qquad e(M) = \frac{M+1}{\alpha - 1}$$

Ainsi, la fonction d'espérance résiduelle tend vers l'infini pour des distributions à queue épaisse...

Autrement dit, leur queue de distribution décroît moins vite que celle de l'exponentielle! L'assureur doit être très attentif lorsqu'il couvre ce type de risque (cat. nat., incendie, risques industriels)...


Weibull: tau < 1
or lognormal
Pareto
Gamma: alpha > 1
Exponential
Weibull:
tau > 1
e(u)
u
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
2
4
6
8
10

Formellement on a:

Definition

Une distribution F a une queue épaisse si elle n'admet aucun moment exponentiel, i.e. $\forall \epsilon > 0$*:*

$$\lim_{x \to \infty} e^{\epsilon x} \bar{F}(x) = \infty.$$

En particulier, si X a une distribution à queue épaisse, alors

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \infty \quad \forall t > 0.$$

Caractérisation probabiliste des queues à variations régulières

Definition

(a) Une fonction L positive, mesurable sur $(0, \infty)$*, est à variations lentes en* ∞ *(noté* $L \in R_0$*) si*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \qquad t > 0.$$

(b) Une fonction H positive, mesurable sur $(0, \infty)$*, est à variations régulières en* ∞ *d'indice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(et noté* $H \in R_\alpha$*) si*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{H(tx)}{H(x)} = t^{\alpha}, \qquad t > 0.$$

Rq:

$\rightarrow$ si $H \in R_\alpha$, alors H peut tjs s'écrire comme

$$H(x) = x^\alpha L(x).$$

$\rightarrow$ les distributions avec queues à variations régulières sont une généralisation de la loi de Pareto.

Ex. de fonctions à variations lentes: $(\ln(1+x))^\alpha$, $\ln(\ln(1+x))$.

Contre exemple: la fonction $2 + \sin(x)$!

Présentons maintenant un résultat important sur la **convolution** des distributions avec des queues à variations régulières:

Proposition

(a) Si F_1 et F_2 sont 2 distributions positives t.q. $\bar{F}_i(x) = x^{-\alpha} L_i(x)$ pour $\alpha > 0$ et $L_i \in R_0 (i = 1, 2)$, alors la convolution $G = F_1 * F_2$ a une queue de distribution à variations régulières t.q.

$$\bar{G}(x) \sim x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x)), \qquad x \to \infty.$$

(b) Si $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ pour $\alpha > 0$ et $L \in R_0$, alors $\forall n \geq 1$:

$$\bar{F}^{*n}(x) \sim n \bar{F}(x), \qquad x \to \infty.$$

(c) Soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Si $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ pour $\alpha > 0$ et $L \in R_0$, alors

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x), \qquad x \to \infty.$$

Preuve. (a) Cherchons un équivalent de $\bar{G}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)$.

i) $\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x) - \mathbb{P}(X_1 > x)\,\mathbb{P}(X_2 > x) &\leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \\ (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x))\,(1 + o(1)) &\leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{P}(X_1 > x)\,\mathbb{P}(X_2 > x) = o(\mathbb{P}(X_i > x))$, $i = 1, 2$. On déduit que

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)}.$$

ii)
$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta\, x, X_2 > \delta\, x\}$
avec $0 < \delta < 1$ (faire un graphique), donc

$$\mathbb{P}(X_1+X_2 > x) \le \mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)+\mathbb{P}(X_2 > (1-\delta)x)+\mathbb{P}(X_1 > \delta\, x)\,\mathbb{P}(X_2 > \delta\, x)$$

et

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x)+\bar{F}_2(x)} &\le (1-\delta)^{-\alpha} \limsup_{x\to\infty} \frac{L_1((1-\delta)x)+L_2((1-\delta)x)}{L_1(x)+L_2(x)} \\ &= (1-\delta)^{-\alpha} \to 1 \quad \text{lorsque } \delta \to 0.\end{aligned}$$

On a utilisé la propriété selon laquelle une somme de fonctions à variations lentes est une fonction à variations lentes.

(b) D'après (a),

$$\bar{F}^{*n}(x) \sim (L_1(x)+...+L_n(x))\,x^{-\alpha} = n\,L(x)\,x^{-\alpha} = n\,\bar{F}(x).$$

(c) Remarquons enfin que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = F^n(x) \\
\mathbb{P}(M_n > x) &= 1 - F^n(x) = 1 - (1 - \bar{F}(x))^n \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \, (\bar{F}(x))^k \\
&= 1 - 1 + n\,\bar{F}(x) - \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-1)^k \, (\bar{F}(x))^k \\
&= n\,\bar{F}(x)\,(1 + o(1)). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Probabilité de ruine et distributions à variations lentes ou régulières

Le théorème de Karamata stipule qu'une fonction à variations lentes peut être considérée comme une cste pour l'intégration (et parfois pour la dérivation).

Theorem

Soient $L \in R_0$ et $\alpha > 1$. Alors

$$Z(x) = \int_x^{\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt \quad \sim \quad (\alpha - 1)^{-1} x^{-\alpha+1} L(x).$$

Preuve partielle.

Nous montrons uniquement que $x^{\alpha-1} Z(x)$ est une fonction à variations lentes.

Soient $x > 0$, $\epsilon > 0$, $\exists \eta$ tel que $\forall y \geq \eta$,

$$(1-\epsilon)\, L(y) \leq L(xy) \leq (1+\epsilon)\, L(y)$$

De plus,

$$(yx)^{\alpha-1} Z(yx) = y^{\alpha-1} \int_{xy}^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{-\alpha} L(t)\, \frac{dt}{x} = y^{\alpha-1} \int_{y}^{\infty} t^{-\alpha}\, L(tx)\, dt.$$

Pour tout $y \geq \eta$:

$$\begin{aligned}
(1-\epsilon) y^{\alpha-1} Z(y) &= (1-\epsilon) y^{\alpha-1} \int_{y}^{\infty} t^{-\alpha}\, L(t)\, dt \\
&\leq y^{\alpha-1} \int_{y}^{\infty} t^{-\alpha}\, L(tx)\, dt = (yx)^{\alpha-1}\, Z(yx) \\
&\leq (1+\epsilon) y^{\alpha-1} \int_{y}^{\infty} t^{-\alpha}\, L(t)\, dt = (1+\epsilon) y^{\alpha-1} Z(y).
\end{aligned}$$

Autrement dit, $y^{\alpha-1} Z(y)$ est à variations régulières. ■

Rappel: dans le modèle de Cramer-Lundberg, la probabilité de ruine a la forme suivante

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^m \bar{F}_{L_1}^{*m}(u),$$

avec $\quad \bar{F}_{L_1}(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^{+\infty} (1 - F_X(u))\, du.$

Sous la condition $\bar{F}_X \in R_{-\alpha}$ pour un $\alpha > 1$, nous conjecturons que

$$\frac{\psi(u)}{\bar{F}_{L_1}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^m \frac{\bar{F}_{L_1}^{*m}(u)}{\bar{F}_{L_1}(u)} \to \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^m m = \rho^{-1}.$$

Attention toutefois à l'intervention des limites!

$\rightarrow$ Une condition d'uniformité est nécessaire pour utiliser le théorème de CV dominée...

D'après le théorème de Karamata, nous avons alors

$$\bar{F}_{L_1}(x) \sim \frac{(\alpha - 1)^{-1}}{\mu}\, x^{-\alpha+1}\, L(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(u) \sim \frac{(\alpha - 1)^{-1}}{\rho\,\mu}\, u^{-\alpha+1}\, L(u).$$

Remarque: ce résultat est très $\neq$ du précédent où la vitesse de décroissance était exponentielle ($\psi(u) \sim Ce^{-Ru}$).
Les proba. de ruine sont donc bc plus importantes lorsque u devient grand.

Les distributions sous-exponentielles

Definition

Une distribution F de support $(0, \infty)$ *est sous-exponentielle, si pour tout* $n \geq 2$*:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n.$$

L'ensemble des fonctions de distribution sous-exponentielle sera noté $\mathcal{S}$.

N.B.: toutes les distributions à variations régulières sont sous-exponentielles.

$\longrightarrow$ si $\quad F \in \mathcal{S}, \quad$ alors

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x) \sim \mathbb{P}(\exists i \text{ tel que } X_i > x).$$

Interprétation: les grandes valeurs de la somme de variables sous-exponentielles proviennent du max. de ces variables. La plus grande valeur donne quasiment sa valeur à la somme: un unique sinistre peut couler la compagnie d'assurance.

$\longrightarrow$ comme $\quad \liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} \geq n, \quad$ il est suffisant de montrer que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} \leq n.$$

En réalité, on peut établir que si la condition est vérifiée pour $n = 2$, elle l'est pour tout n.

Contre-exemple:

une distribution qui n'est pas sous-exponentielle peut par exemple être la loi exponentielle.

En effet notons $S_n = X_1 + ... + X_n$, et supposons que les $X_i \sim \mathcal{E}xp(\beta)$.

Ainsi, $S_n \sim \mathcal{G}amma(n, \beta)$. D'après la règle de l'Hospital,

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(X_i > x)} \sim \frac{\beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(n)\beta e^{-\beta x}} \sim \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \to \infty.$$

Donc tous les éléments de la somme participent aux grandes valeurs!

Propriétés des distributions sous-exponentielles

Proposition

(a) Si $F \in \mathcal{S}$, *alors uniformément pour tout y appartenant à un compact C de* $(0, \infty)$*:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1 \qquad (*)$$

(b) Si $(*)$ *est vérifiée, alors* $\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{\epsilon x}\bar{F}(x) = \infty.$

(c) Si $F \in \mathcal{S}$, *alors, soit* $\epsilon > 0$ *fixé,* $\exists$ *une constante K telle que* $\forall n \geq 2$ *et* $x \geq 0$,

$$\frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n.$$

Preuve.

(a) Rappelons que $\quad \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x) = \int_0^x \mathbb{P}(X_1 \leq x - t)\, f(t)\, dt.$

Soient $x \geq y \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F(x-t)}{\bar{F}(x)}\, f(t)\, dt \\
&= 1 + \int_0^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, f(t)\, dt \\
&= 1 + \int_0^y \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, f(t)\, dt + \int_y^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, f(t)\, dt \\
&\geq 1 + F(y) + \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}(F(x) - F(y)).
\end{aligned}
$$

Donc $\quad 1 \leq \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \left(\frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1}.$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1} = \frac{(1 - F(y))}{(1 - F(y))} = 1.$$

(b) D'après (a), $\bar{F} o \ln \in R_0$, ce qui implique que

$$\lim_{x\to\infty} x^{\epsilon}\bar{F}(\ln x) = \infty.$$

(c) Soit $\alpha_n = \sup_{x\geq 0} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)}$, et $T < \infty$.

$$\frac{\bar{F}^{*(n+1)}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\bar{F}^{*n}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y).$$

et donc

$$\alpha_{n+1} \leq 1 + \sup_{0\leq x\leq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{*n}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y) + \sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{*n}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y)$$

Posons $\quad A(T) = \sup_{0\leq x\leq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{*n}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y) \leq \frac{1}{\bar{F}(T)}.$

Par CV dominée, on a pour T suffisament grand:

$$\sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{*n}(x-y)}{\bar{F}(x-y)} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y) \leq \alpha_n \sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}\, dF(y) \leq \alpha_n(1+\epsilon).$$

Enfin, puisque $\alpha_1 = 1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &\leq 1 + A(T) + \alpha_n(1+\epsilon) \\
&\leq (1 + A(T)) + (1+\epsilon)\Big((1 + A(T)) + \alpha_{n-1}(1+\epsilon)\Big) \\
&\leq (1 + A(T)) \sum_{i=0}^{n} (1+\epsilon)^i + (1+\epsilon)^n \\
&\leq (1+\epsilon)^n (1 + A(T)) \left(\sum_{i=0}^{n} (1+\epsilon)^{-i} \right) + (1+\epsilon)^n \\
&\leq (1+\epsilon)^n (1 + A(T)) \left(1 + \frac{1}{1 - (1+\epsilon)^{-1}} \right) \leq K (1+\epsilon)^n.
\end{aligned}$$

Calcul de probabilité de ruine des distributions sous-exponentielles

Soit le montant agrégé des sinistres jusqu'à l'instant t donné par

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n.$$

On s'intéresse à la proba (avec $p_t(n) = \mathbb{P}(N(t) = n)$)

$$\boxed{\mathbb{P}(S(t) < x) = G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{*n}(x)} \qquad x \geq 0.$$

Rq: dans Cramer-Lundberg, $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t) \Rightarrow p_t(n) = (\lambda t)^n \frac{e^{-\lambda t}}{n!}$

Nous formulons maintenant un résultat sur le montant agrégé des sinistres dans le cas sous-exponentiel:

Theorem

Supposons que $F \in \mathcal{S}$, *fixons* $t > 0$, *et faisons l'hypothèse que* $(p_t(n))$ *satisfait*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\epsilon)^n p_t(n) < \infty.$$

Alors $G_t \in \mathcal{S}$ *et*

$$\bar{G}_t(x) \sim \mathbb{E}[N(t)]\, \bar{F}(x), \qquad x \to \infty.$$

Rq: $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\epsilon)^n p_t(n) < \infty$ équivaut à $\sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) e^{ns}$ analytique au voisinage de 0, ou encore $N(t)$ admet une f.g.m. autour de 0.

Preuve.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\epsilon)^n p_t(n) < \infty$.

$F \in \mathcal{S}$, donc il existe K tel que $\frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} < K\,(1+\epsilon)^n$.

On peut ainsi écrire que

$$\frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_t(n)\frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} p_t(n)(1+\epsilon)^n < \infty.$$

Grâce au théorème de CV dominée, on peut intervertir les limites, et on obtient

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p_t(n) = \mathbb{E}[N(t)]. \qquad \blacksquare$$

Exemples:

- $\rightarrow$ le modèle du processus de Poisson ($\mathbb{E}[N(t)] = Var(N(t))$);
- $\rightarrow$ le modèle du processus Binomial négatif: c'est un processus d'arrivée des sinistres qui vérifie $\forall t$:

$$p_t(n) = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\, n!}\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\beta+t}\right)^{n} \qquad n \in \mathbb{N},\ \beta, \gamma > 0.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[N(t)] = \frac{\gamma t}{\beta} \qquad\qquad Var(N(t)) = \frac{\gamma t}{\beta}(1 + \frac{t}{\beta})$$

En posant $q = \frac{\beta}{\beta+t},\ p = \frac{t}{\beta+t}$, et utilisant la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}(x/e)^x,$$

on obtient finalement $\quad p_t(n) \sim n^{\gamma-1} p^n \frac{q^\gamma}{\Gamma(\gamma)}$.

Interprétation du théorème: la distribution de la somme agrégée a la même queue que celle des sinistres. Dans le cas où les distributions ne sont pas sous-exponentielles, la forme de la queue de distribution dépend à la fois de celle de $N(t)$ et de celle des X_i.

Modélisation de ce dernier processus: le voir comme un processus de Poisson mélangé.

Supposons que $\Theta \sim \mathcal{G}amma(\gamma, \beta)$.
Considérons le processus de Poisson conditionnel à Θ, de paramètre λ.

Alors le modèle marginal est un processus Binomial négatif.

[Cela revient à effectuer un changement de temps aléatoire.]

On retrouve ensuite la proba. de ruine grâce à la convolée de Beeckman:

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^n \bar{F}_{L_1}^{*n}(u).$$

D'après le th. précédent, si $L_1 \in \mathcal{S}$ alors pour des FP initiaux u grands, on a:

$$\psi(u) \sim \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^n \bar{F}_{L_1}(u) = \rho^{-1} \bar{F}_{L_1}(u) = \frac{1}{\rho\mu} \int_u^{\infty} \bar{F}(x)\, dx.$$

Résultat radicalement $\neq$ des distributions non sous-exponentielles puisque l'on avait alors que $\psi(u) \sim Ce^{-Ru}$. Les probabilités asymptotiques de ruine ont des vitesses de décroissance vers 0 bc plus lentes!

On a même un théorème de Cramer-Lundberg pour des sinistres à queue épaisse:

Theorem

Considérons le modèle de Cramer-Lundberg avec la condition de profit net vérifiée.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
(i) $F_{L_1} \in \mathcal{S}$,
(ii) $L \in \mathcal{S}$,
(iii) $\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_{L_1}(u)} = \rho^{-1}$.

Naturellement, ce théorème induit des questions intuitives...

1. Si $F_X \in \mathcal{S}$, alors a-t-on $F_{L_1} \in \mathcal{S}$?
2. Réciproquement, si $F_{L_1} \in \mathcal{S}$, alors a-t-on $F_X \in \mathcal{S}$?

Réponses: si $\bar{F}_X$ varie régulièrement, alors oui d'après le th. de Karamata. Voici d'autres cond. suffisantes pour la 1[ère] question.

Proposition

Soit le taux de hasard de X, noté $h(x)$ et tel que $h(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}$.
Soit la fonction de hasard associée $H(x) = -\ln \bar{F}_X(x)$.

Si *l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) $\limsup_{x\to\infty} xh(x) < \infty$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} xh(x) = \infty,$ *et* $\limsup_{x\to\infty} \frac{xh(x)}{H(x)} < 1$,

(iii) $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$ *et* $\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_X(x/2)}{\bar{F}_X(x)} < \infty$,

Alors

$$F_{L_1} \in \mathcal{S}.$$

6 Théorie de la ruine

Quand et comment arrive la ruine?

Les questions d'intérêt de cette dernière partie sont les suivantes:

- $\longrightarrow$ quelle est la taille du sinistre qui conduit à la ruine?
- $\longrightarrow$ quelle est la distribution asymptotique du temps de ruine?
- $\longrightarrow$ quelle est l'allure de la trajectoire du processus des réserves juste avant la ruine?

On étudie ces questions suivant que les sinistres aient ou non des distributions à queue épaisse...

Rappel: la probabilité de ruine est donnée par $\psi(u) = \mathbb{P}(L > u)$,

avec $L = \sup_{t \geq 0} (S(t) - ct) = \sup_{t \geq 0} R(t)$.

On écrit $R(t)$ de façon discrétisée:

$$\sup_{t \geq 0} R(t) = \sup_{n \geq 0} R_n \qquad \text{où } R_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k,$$

avec $Z_k = X_k - cY_k$ et $\mathbb{E}[R(t)] = (1 + \rho)\lambda\mathbb{E}[X] - ct$.

Si X admet une f.g.m., le coef. d'ajustement R vérifie

$$1 + \frac{c}{\lambda} R = M_X(R) = \mathbb{E}[e^{RX}].$$

De plus,

$$\begin{aligned} M_Z(R) &= \mathbb{E}[e^{RZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Ry}\, dF_Z(y) = \mathbb{E}[e^{R(X-cY)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{RX}]\,\mathbb{E}[e^{-cRY}] = M_X(R)\frac{\lambda}{\lambda + cR} = \frac{M_X(R)}{1 + \frac{c}{\lambda}R} = 1. \end{aligned}$$

On peut alors définir la transformée d'Esscher de Z, notée $\tilde{Z}$, dont la f.d.r. vaut

$$G(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{Ry}\, dF_Z(y)}{M_Z(R)} = \int_{-\infty}^{x} e^{Ry}\, dF_Z(y),$$

avec pour espérance

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{Rx}\, dF_Z(x) = M_Z'(R) > 0.$$

1$^{\text{er}}$ cas: X admet une f.g.m. au voisinage de 0.

Soit la distribution (f.d.r.) empirique des Z_k :

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_k \le x\}}.$$

On sait d'après le théorème de Glivenko-Cantelli que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| H_n(x) - F_Z(x) \right| \underset{n \longrightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{p.s.}$$

τ_u est l'instant de ruine et on note $\mathbb{P}^{(u)}$ la proba. conditionnelle à l'événement $\tau_u < \infty$.

On sait que si $u \to \infty$ alors $\tau_u \to \infty$ p.s.

Enfin on a la propriété suivante:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| H_{N(\tau_u)}(x) - G(x) \right| \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \text{proba.}$$

Interprétation:

$\longrightarrow$ au moment de la ruine, les v.a. Z_k “changent” de loi et se transforment en $\tilde{Z}_k$;

$\longrightarrow$ on passe

- d'une marche aléatoire avec tendance négative...
- à une marche aléatoire avec tendance positive lorsque l'on regarde ce qui s'est passé jusqu'à la ruine.

$\longrightarrow$ plus précisément, on a le résultat suivant:

Theorem

Lorsque $u \to \infty$,

(a) $$\sup_{t \in]0,1[} \left| \frac{R(t\,\tau_u)}{\tau_u} - \lambda t\, \mathbb{E}[\tilde{Z}] \right| \to 0 \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{proba.}$$

(b) $$\frac{\tau_u - \frac{u}{\mathbb{E}[\tilde{Z}]}}{K\sqrt{u}} \to \mathcal{N}, \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{distribution}$$

où $\mathcal{N}$ a une distribution $\mathcal{N}(0,1)$, et K est une constante.

(c) $$\Big(R(\tau_u) - u,\ R(\tau_u) - R(\tau_u^-) \Big) \to \mathcal{Q}, \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{distribution}$$

où $\mathcal{Q}$ a une distribution non-dégénérée.

Remarques:

- $\rightarrow$ $R(\tau_u) - u$ mesure l'importance du défaut;
- $\rightarrow$ $R(\tau_u) - R(\tau_u^-)$ est la taille du sinistre qui provoque le défaut (de loi $\neq$ de F_X);
- $\rightarrow$ $\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = -c + \lambda u = \lambda \mathbb{E}[Z] < 0$: R_n est une marche aléatoire avec tendance négative.
- $\rightarrow$ Aux alentours de l'instant de défaut τ_u, R_n se comporte comme si la distribution des incréments de la marche aléatoire changeait de F_Z à G;
- $\rightarrow$ il y a un changement de la tendance (devient > 0) dû à une accumulation de sinistres qui causent la ruine.

2$^{\text{ème}}$ cas: distributions sous-exponentielles. Dans ce cas,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| H_{N(\tau_u)}(x) - F_Z(x) \right| \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \text{proba.}$$

Theorem

Lorsque $u \to \infty$,

(a) $$\sup_{t\in]0,1[} \left| \frac{R(t\,\tau_u)}{\tau_u} - \lambda t\, \mathbb{E}[Z] \right| \to 0 \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{proba.}$$

(b) $$-\lambda \mathbb{E}[Z] \frac{\tau_u}{e(u)} \to \mathcal{Z}_\xi, \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{distribution}$$

(c) $$\frac{\left(R(\tau_u) - u,\, R(\tau_u) - R(\tau_u^-) - u\right)}{e(u)} \to \mathcal{T}, \qquad \mathbb{P}^{(u)} - \textit{distribution}$$

où $\mathcal{Z}_{xi}, \mathcal{T}$ non-dégénérées, et $e(u) = \mathbb{E}[X - u \,|\, X > u] = \int_u^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(u)}\, dx$.

Interprétations et remarques :

- $\longrightarrow$ le comportement d'une trajectoire de R_n juste avant la ruine apparait normale: elle ressemble à n'importe quelle autre trajectoire;
- $\longrightarrow$ la ruine est causée par un unique sinistre;
- $\longrightarrow$ il est tellement grand qu'on doit diviser par l'espérance résiduelle pour obtenir une loi asymptotique de l'excès du processus de risque par rapport à u;
- $\longrightarrow$ τ_u converge à la vitesse $e(u)$, qui est inférieure ou égale à u. Le défaut a donc tendance à arriver plus vite que dans le premier cas !

ANNEXES

Théorème de convergence monotone

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Pour toute suite croissante (f_n) de fonctions mesurables sur E et à valeurs dans $[0, +\infty[$, la limite simple de la suite est mesurable et

$$\lim \left(\int f_n \, d\mu \right) = \int (\lim f_n) \, d\mu.$$

Corollaire: si les intégrales $\int f_n \, d\mu$ sont toutes majorées par un même réel, alors la fonction $\lim f_n$ est intégrable (donc finie p.p.), et on peut exprimer le résultat en disant que $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Théorème de convergence dominée

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Si (f_n) une suite de fonctions mesurables sur E et à valeurs réelles ou complexes, telle que

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow f$ sur E;

→ $\exists$ une fn. g, intégrable t.q. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \left|f_n(x)\right| \leq g(x)$;

Alors

$$f \text{ intégrable}, \quad \text{et } \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Ceci entraîne: $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$