Théorie du risque TD 1.

Exercice 1. Etablissez les identités suivantes:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(p)dp$$

$$\mathbb{E}\left[(X-t)_+\right] = \int_{F_X(t)}^1 F_X^{-1}(p)dp - t\bar{F}_X(t)$$

Exercice 2. Afin de déterminer la prime pure, nous pouvons choisir un principe de prime pénalisant différemment la sous-tarification et la sur tarification, du type

$$Prime = \arg\min_c \alpha\mathbb{E}\left[(S-c)_+\right] + \beta\mathbb{E}\left[(c-S)_+\right]$$

Montrer que si $\alpha = \beta$, la prime est égale à la médiane et que si $\alpha \neq \beta$ la prime est égale au quantile d'ordre $\alpha/(\alpha+\beta)$. Nous faisons l'hypothèse que la distribution de S est continue.

Exercice 3. Montrez que quelque soient les risques X et Y de même moyenne μ , nous avons l'égalité suivante:

$$\int_0^{+\infty} \left(\pi_X(t) - \pi_Y(t)\right) dt = \frac{1}{2}\left(Var(X) - Var(Y)\right)$$

Ou $\pi_X(t) = \mathbb{E}(X-t)_+$ est la prime stop loss pour un niveau de rétention t

Exercice 4. Soient les coûts de sinistres X_0, X_1, $X_2 \dots$ supposés positifs, continus et indépendants de même fonction de répartition F. Nous souhaitons déterminer quand aura lieu le prochain sinistre ayant au moins le même coût que X_0 ainsi que le montant de ce sinistre. Soit N le premier entier tel que $X_n > X_0$ et posons $Y = X_N$. Montrez que:

1. $P(N=n) = \frac{1}{n(n+1)}$
2. Déduisez que $\mathbb{E}(N) = +\infty$ et interprétez ce résultat.
3. Montrez que

$$P(Y < x) = F(x) + \bar{F}(x)\ln\bar{F}(x)$$

Exercice 5. Pour un sinistre S un principe de calcul de prime Π est dit compatible avec un contrat de réassurance de fonction de rétention h ($h(0) = 0$ et $0 \leq h^{'}(s) \leq 1$) si:

$$\Pi(S) = \Pi(h(S)) + \Pi(S - h(S))$$

1. Donner un exemple de principe de calcul de prime compatible avec toutes les fonctions de rétention.

2. On suppose également que S admet une fonction de distribution continue et on note F_S^{-1} sa fonction inverse. On définit le principe de prime suivant:

$$\Pi_{da}(S) = \mathbb{E}S + \beta\mathbb{E}(S - F_S^{-1}(1/2))$$

2.1 Montrer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S &= \int_0^1 F_S^{-1}(u)du \\
\mathbb{E}\left(S - F_S^{-1}(1/2)\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(F_S^{-1}(\frac{1}{2}) - F_S^{-1}(u)\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(F_S^{-1}(u) - F_S^{-1}(\frac{1}{2})\right) du \\
\Pi_{da}(S) &= (1-\beta)\int_0^{1/2} F_S^{-1}(u)du + (1+\beta)\int_{1/2}^1 F_S^{-1}(u)du
\end{aligned}$$

2.2 Soient h_1 et $h_2$deux fonctions croissantes. Montrer que $F_{h_1(S)}^{-1} = h_1(F_S^{-1})$ et que

$$F_{h_1(S)+h_2(S)}^{-1} = F_{h_1(S)}^{-1} + F_{h_2(S)}^{-1}$$

2.3 En déduire que

$$\Pi_{da}(h_1(S) + h_2(S)) \quad = \quad \Pi_{da}(h_1(S)) + \Pi_{da}(h_2(S))$$

et que Π_{da} est compatible avec toutes les fonctions de rétention.

Exercice 6. On considère une variable aléatoire S de fonction de répartition F_S et de fonction génératrice des moments $M_S(t) = \mathbb{E}(e^{tS})$. On définit pour tout h une nouvelle variable aléatoire S_h de fonction de répartition:

$$dF_h(S) \quad = \quad \frac{e^{hs} dF_S(s)}{M_S(h)}$$

S_h est la transformée d'Esscher de S pour le paramètre h.
1. Exprimer la fonction génératrice des moments de S_h en fonction de celle de S.
2. Expliciter les transformées d'Esscher de paramètre h des lois

- Loi de Poisson Poi(λ)
- Loi Gamma $\gamma(\alpha, \delta)$

3. Donner l'expression de $\mathbb{E}(S_h)$, $\frac{d}{dh}\mathbb{E}(S_h)$ et $Var(S_h)$ en fonction des dérivées successives de M. En déduire que l'application $h \to \mathbb{E}(S_h)$ est croissante.
4. On considère le principe d'Esscher de calcul de prime. Montrer qu'il vérifie le principe d'au moins la prime pure, de translation et d'additivité.

Exercice 7. Un réassureur propose de couvrir un risque S avec l'un des contrats suivants:

- une quote-part: soit $0 < \alpha < 1$, le réassureur rembourse $S^{'} = \alpha S$
- un excédent de sinistre: soit $M > 0$, le réassureur rembourse $S^{''} = (S - M)^{+}$

On suppose que deux contrats ont la même prime de réassurance $\mathbb{E}(\alpha S) = \mathbb{E}(S - M)_{+}$et que S a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^{+}$.

1. Tracer les fonctions de répartition de S, $S^{'}$ et $S^{''}$.
2. Comparer $S^{'}$ et $S^{''}$ à l'aide de la dominance stochastique d'ordre 2.
3. On suppose que le réassureur utilise le principe de la valeur moyenne. Quel est le contrat de réassurance qui a la prime la plus chère?

Exercice 8. Un assureur doit choisir un contrat de réassurance pour un risque X donné parmi une combinaison linéaire de contrats du type excédent de sinistres. On suppose que les montants des priorités sont fixés: $0 \leq d_0 \leq d_1 \leq ... \leq d_n$ avec $d_n > \mathbb{E}X$. L'ensemble des contrats possibles est donné par:

$$\mathcal{I} = \left\{ I(.) \,|\, I(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x - d_i)_{+}, \quad \alpha_i \geq 0\,, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \leq 1 \right\}$$

Le réassureur utilise le principe de prime de l'espérance avec le coefficient de chargement β et l'assureur se fixe un montant $P \leq \mathbb{E}(X)(1+\beta)$ de primes qu'il désire souscrire en réassurance. Il choisit donc son contrat dans l'ensemble:

$$\mathcal{I}_P = \{I(.) \in \mathcal{I} \,|\, (1+\beta)\mathbb{E}(I(X)) = P\}$$

1. Soit d tel que $(1+\beta)\mathbb{E}(X-d)_{+} = P$. Montrer qu'il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que $d_k \leq d \leq d_{k+1}$.
2. On suppose que le critère d'optimisation est cohérent avec la dominance stochastique d'ordre 2 et que l'assureur minimise ce critère. Quel est le contrat optimal pour l'assureur?

Exercice 9. (les equivalents comonotones ont la somme la plus grande, au sens de la dominance stochatisque d'ordre 2). Considérons un vecteur aléatoire $\bar{X} = (X_1 \ldots X_n)$ et définissons son **équivalent comonotone** comme suit:

$$\bar{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) = (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))$$

où $U \sim Uniforme(0,1)$.

1. Vérifier que $\bar{Y}$ a la même distribution que la borne supérieure de Fréchet $W_n = \min(F_1(x_1) \ldots F_n(x_n))$.

2. Nous appelons support de Y la courbe des $\left\{F_{X_1}^{-1}(u), \ldots, F_{X_n}^{-1}(u) \,|\, 0 < u < 1\right\}$, considérez deux points $(y_1 \ldots y_n)$ et $(z_1 \ldots z_n)$ de ce support. Est-il possible d'avoir $y_1 \leq z_1$ et $y_2 \leq z_2$?

3. Montrer que l'inégalité suivante:

$$Y_1 + \ldots + Y_n \geq X_1 + \ldots + X_n$$

Théorie du risque TD 2.

Exercice 10. Soit deux distributions de probabilité F_y et G_y qui sont telles que $F_y \leq_{SL2} G_y$ pour tout y. Soit $U(y)$ une distribution quelconque.

1. Montrez que $F(x) = \int_{\mathbb{R}} F_y(x)dU(y) \leq_{SD2} \int_{\mathbb{R}} G_y(x)dU(y)$ then $F \leq_{SD2} G$.

2. Montrez que l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire est toujours moins dangereuse à l'ordre 2 que la variable initiale. c-à-d. montrez que $\mathbb{E}(X|\Lambda) \leq_{SD2} X$.

3. Soit U une variable uniforme et une variable aléatoire Λ indépendante. Sur base du résultat de la question 9, montrez que

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{SD2} F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_N|\Lambda}(U)$$

4. Sur base du résultat de la question 9, montrez que

$$F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_N|\Lambda}(U) \leq_{SD2} F^{-1}_{X_1}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n}(U)$$

Exercice 11. Le montant de sinistre causé par une police du portefeuille est de la forme:

$$S = \begin{cases} 0 & avec\, une\, probabilit\acute{e}\, 0.9 \\ X & avec\, une\, probabilit\acute{e}\, 0.1 \end{cases}$$

Où

$$P(X > x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{3/2} \qquad x > 0$$

1. Calculez la prime pure pour cette police.
2. Calculez le montant de la prime nette de façon telle que la probabilité que le montant de sinistre S dépasse ce montant soit au plus de 1%.

Exercice 12. La charge totale S des sinistres relatifs à un portefeuille d'assurances vaut $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ où $N \sim Poi(\lambda)$, et où les X_i sont indépendants et de même loi $Expo(\theta)$.
1. Calculez la prime pure relative au portefeuille.
2. Fixez la hauteur du chargement de sécurité afin que la probabilité de ruine soit de maximum ϵsi l'assureur dispose d'un capital κ.

- Sur base du théorème central limite
- Sur base de l'approximation NP

Exercice 13. On suppose que S_1a une loi Poisson composée de paramètres (λ, F_X) et S_2 a une loi Négative Binomiale composée de paramètres (r, p, F_Y).
1. Donner les fonctions génératrices des moments d'une loi de Poisson de paramètre λ et d'une loi binomiale négative de paramètre (r, p).
2. Donner les fonctions génératrices des moments de S_1 et S_2.
3. Démontrer que S_1 et S_2 ont une même loi si et seulement si

$$\lambda = -r \ln p$$

$$F_X(x) \quad = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \quad \frac{(1-p)^k}{-k \ln p} F^*_Y(x)$$

Que concluez-vous de cet exercice?

Rappel: Si N a une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$P(N = n) \quad = \quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad n \geq 0$$

Si N a une loi binomiale négative de paramètres (r, p), alors

$$P(N = n) \quad = \quad \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r (1-p)^n \qquad n \geq 0$$

Exercice 14. Un assureur possède un portefeuille composé de N risques indépendants $S_1, \ldots, S_N$. Un réassureur lui propose plusieurs types de contrat non-proportionnel. Il utilise le principe de la variance pour calculer ses primes avec chargement (coefficient de chargement ρ), i.e. il demande la prime

$$\Pi(\varphi(S)) \quad = \quad \mathbb{E}(\varphi(S)) + \rho Var(\varphi(S))$$

afin de réassurer la partie $\varphi(S)$ du risque S $(0 \leq \varphi' \leq 1)$.

On suppose que les S_i ont une distribution géométrique composée telle que:

$$S_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{N_i} Y_{i,j} \quad avec \quad Y_{i,j} \sim Exp(\beta_i) \; et \; N_i \sim Geo(q_i)$$

Pour rappel, $P(Y_{i,j} > x) = \exp(-\beta_i x)$, $P(N_i = n) = q_i^n(1 - q_i)$.

1. Donner les fonctions génératrices des moments, expérances et variances de $Y_{i,j}$ et de N_i.
2. L'assureur choisit un excédent par sinistre de priorité M_i et de portée illimitée, i.e. , il conserve pour chaque sinistre $Y_{i,j}$du risque, le montant $\min(Y_{i,j}, M_i)$.

a. Contre quel type d'événement veut se prémunir l'assureur?
b. Montrer que le risque i cédé au réassureur $\sum_{j=1}^{N}(Y_{i,j} - M_i)_+$a même loi que $\sum_{j=1}^{\tilde{N}_{M_i}} \tilde{Y}_{i,j}$ où $\tilde{N}_{M_i} = \sum_{j=1}^{N_I} I_{\{Y_{i,j} > M_i\}}$ et les $\tilde{Y}_{i,j}$ sont indépendants (entre eux des $Y_{i,j}$) et de même loi que les $Y_{i,j}$.
c. Calculer la prime pure de réassurance pour le risque i et la prime pure de réassurance pour l'ensemble du portefeuille.
d. Calculer la prime de réassurance avec chargement pour le risque i et la prime de réassurance avec chargement pour l'ensemble du portefeuille.

3. L'assureur choisit un excédent par risque de priorité $M_i^{'}$ et de portée illimitée, i.e. il conserve pour le risque i le montant $\min(S_i, M_i^{'})$.

a. Contre quel type d'événement veut se prémunir l'assureur?
b. Donner la loi de S_i.
c. Déterminer la priorité $M_i^{'}$ telle que la prime pure soit identique à celle de la question 2.c
d. Comparer alors la prime avec chargement identique à celle demandée dans la question 2.d.

3. L'assureur choisit un excédent de perte globale de priorité M et de portée illimitée, i.e. il conserve le montant $\min(S, M)$ où $S = \sum_i^N S_i$.
a. Quels sont les avantages et les inconvénients de ce traité par rapport au traité précédent?
b. La priorité M est déterminée de telle manière que la prime pure de réassurance pour l'ensemble du portefeuille soit égale à la prime pure de la question 2.c. Donner un minorant de M en remarquant que la loi d'une somme de variables indépendantes domine toujours à l'ordre 1 celle de leur minimum.
C. A votre avis, la prime avec chargement sera-t'elle supérieure ou inférieure à la précédente prime?

Exercice 15. On considère un portefeuille de polices d'assurance dont le montant agrégé des sinistres S peut être modélisé par une distribution Géométrique-composée de paramètre (p, F_X)

$$F_S(s) \quad = \quad P(S \leq s) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k F_X^{*k}(s)$$

On définit γ tel que $M_X(\gamma) = \mathbb{E}(e^{\gamma X}) = p^{-1}$.

1. Montrer que la fonction de distribution F_S satisfait l'équation intégro différentielle:

$$F_S(s) = (1-p) + p(F_X * F_S)(s) \quad s \geq 0$$

où $F_X * F_S$ est la convolution de X et de S : $F_X * F_S(s) = \int_0^s F_S(s-x)dF_X(s)$.

2. On définit une suite de fonctions de distribution F_n de la manière suivante:

$$F_n(s) \quad = \quad (1-p) + p\,(F_X * F_{n-1})(s) \quad s \geq 0$$

2.a Supposer que $F_1(s) \geq F_0(s)$, $s \geq 0$ et montrer que $F_X * F_1(s) \geq F_X * F_0(s)$, $s \geq 0$. En déduire que $F_{n+1}(s) \geq F_n(s)$, $s \geq 0$ et $n \geq 1$ puis que $F_S(s) = \lim_{n\to\infty} F_n(s)$ $s \geq 0$, et enfin que $\bar{F}_S(s) \leq \bar{F}_0(s)$, $s \geq 0$.

2.b On pose

$$F_0(s) = (1-a) + aG(s)$$

où $G(s) = 1 - e^{-\gamma s}$, $s \geq 0$. Montrer que

$$F_1(s) = (1-p) + p\left(F_X(s) - a\int_0^s e^{-\gamma(s-x)} dF_X(x)\right) \quad s \geq 0$$

Montrer que la condition $F_1(s) \geq F_0(s)$ $s \geq 0$ est équivalente à

$$a\left(1 - p\int_0^s e^{\gamma x} dF_X(x)\right) \geq p e^{\gamma s} \bar{F}_X(s).$$

2.c En utilisant la définition de γ, montrer que a optimal est donné par

$$a_+ = \sup_{s\geq 0} \frac{e^{\gamma s}\bar{F}_X(s)}{\int_s^\infty e^{\gamma x} dF_X(x)}$$

3. En déduire que

$$a_- e^{-\gamma s} \leq \bar{F}_S(s) \leq a_+ e^{-\gamma s}$$

où

$$a_- = \inf_{s\geq 0} \sup_{s\geq 0} \frac{e^{\gamma s}\bar{F}_X(s)}{\int_s^\infty e^{\gamma x} dF_X(x)}$$

4. Application: F_X est la distribution exponentielle de paramètre δ. Montrer que $\gamma = \delta(1-p)$, $a_+ = a_- = p$ et que $\bar{F}_S(s) = p e^{-(1-p)\delta s}$.

Théorie du risque TD 3.

Exercice 16. Pour $0 < q < 1$, définissons la fonction de distorsion

$$g_q(x) \quad = \quad \Phi(\Phi^{-1}(q) + \Phi^{-1}(x)) \quad 0 < x < 1,$$

appelée "Normal transform" de niveau q. La mesure de risque de Wang associée à de telles fonctions de distorsion est appelée mesure de risque normal transform et est notée $NT_q(X)$. Montrez que

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow NT_q(X) = VaR(X, q)$$

Exercice 17.
Considérons un portefeuille de 2000 polices. Soit S_i le débours annuel de l'assureur pour la police numéro i. On suppose les S_i indépendantes et de forme

$$S_i = \begin{cases} 0 & avec\, la\, probabilit\acute{e}\, 1 - q_i \\ Y_i & avec\, la\, probabilit\acute{e}\, q_i \end{cases}$$

où $Y_i \sim Exp(1)$ et les q_i sont donnés dans le tableau ci-dessous:

Police i	q_i
i=1,...,100	1%
i=101,...,1000	3%
i=1001,...,2000	5%

1. Décrire l'approximation collective de $S^{ind} = \sum_{i=1}^n S_i$ en vue de calculer une probabilité de déficit.

Exercice 18. On considère un portefeuille d'un assureur qui peut être modélisé à l'aide du modèle de Cramer Lundberg:

- Les sinistres X_i sont indépendants et de même loi exponentielle F, d'espérance μ
- Le processus de comptage des sinistres $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

La prime d'assurance est égale à $c = (1+\beta)\lambda\mu$ où $\beta > 0$ est le coefficient de chargement. On rappelle que le coefficient d'ajustement R vérifie la relation:

$$1 + \frac{c}{\lambda}R = \mathbb{E}(e^{RX}) = M_X(R)$$

Un réassureur lui propose une couverture de type quote part (l'assureur conserve une proportiion α du risque).

1. Donner le coefficient d'ajustement avant réassurance.

2. Le réassureur utilise un coefficient de chargement $\gamma = \beta$. Calculer le nouveau coefficient d'ajustement après réassurance. Qu'en concluez-vous?

3. Le réassureur utilise un coefficient de chargement $\gamma > \beta$. Quelle est la signification de cette hypothèse? Est-ce une pratique de marché? Exprimer la condition du profit net et donner le nouveau coefficient d'ajustement. Comparer avec les questions 1. et 2.

4. Comment doit-il choisir le coefficient α afin de maximiser son coefficient d'ajustement?

Exercice 19. On se place dans le cadre du modèle de Cramer-Lundberg:

- les sinistres X_i sont indépendants et de même loi F (d'espérance μ)
- Le processus de comptage des sinistres $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ.
- Le taux de prime par unité de temps est égal à $c = (1+\beta)\lambda\mu$ avec $\beta > 0$.
- L'assureur dispose d'un capital initial u.

On rappelle que:

- La probabilité de ruine est définie par:

$$\psi(u) \quad = \quad P\left(\exists t \, tel \, que \; u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k < 0\right)$$

  le coefficient d'ajustement R vérifie:

$$1 + \frac{c}{\lambda}R \quad = \quad \mathbb{E}(e^{RX}) = M_X(R)$$

1. On suppose que F satisfait la condition supplémentaire:

$$\bar{F}(x) \leq \rho e^{-Rx} \int_x^\infty e^{Ry} dF(y)$$

1.a On note $\psi_k(u)$la probabilité qu'il y ait ruine avant l'arrivée où à l'arrivée du $k^{ième}$ sinistre.

- Montrer que $\psi_1(u) \leq \rho e^{-Ru}$
- En remarquant que $\psi_{k+1}(u) = \mathbb{E}(\psi_k(u + ct - X))$ où T suit une loi exponentielle de paramètre λ et est indépendant de X, montrer que $\psi(u) \leq \rho e^{-Ru}$.

1.b Montrer que:

$$\int_x^\infty e^{Ry} dF(y) \quad = \quad e^{Rx}\bar{F}(x) + R\int_x^\infty e^{Ry}\bar{F}(y)dy$$

2. On suppose que F a un taux de hasard $q(x) = -(d/dx)\log \bar{F}(x)$ qui satisfait $q(x) \leq m < \infty$.

- Montrer que pour $y \geq x$

$$\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x)e^{-(y-x)m}$$

- En utilisant la question 1, montrer que:

$$\psi(u) \leq \rho e^{-Ru} \quad où \quad \rho = 1 - R/m$$

3. On suppose que q est décroissante pour tout $x \geq 0$:

- Montrer que pour $y \geq x$:

$$\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y-x)$$

- En utilisant la question 1, montrez que

$$\psi(u) \leq \rho e^{-Ru} \quad où \quad \rho = \frac{1}{1 + \frac{c}{\lambda}R}$$

Exercice 20. On considère un portefeuille d'assurance modélisable à l'aide d'un processus de Poisson composé où

- les sinistres X_i sont indépendants et de même loi exponentielle F, d'espérance μ.
- le processus de comptage des sinistres $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

La prime d'assurance par unité de temps est égale à $c = (1+\beta)\lambda\mu$ où $\beta > 0$ est le coefficient de chargement.

1. Donner l'équation d'ajustement? Quelle est la valeur du coefficient d'ajustement?
2. On considère un portefeuille d'un assureur qui peut être modélisé à l'aide de la somme de deux processus Poisson composés indépendants $\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_{1,i}$ et $\sum_{i=1}^{N_2(t)} X_{2,i}$.

- Les sinistres $X_{j,i}$sont indépendants et de même loi exponentielle F_j (d'espérance μ_j), $j = 1, 2$.
- Les processus de comptage des sinistres $N_j(t)$ sont des processus de Poisson de paramètre λ_j $j = 1, 2$.

2.a. Calculer la fonction génératrice du montant cumulé des sinistres $\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_{1,i} + \sum_{i=1}^{N_2(t)} X_{2,i}$, qu'en concluez-vous?
2.b. En déduire la nouvelle équation que doit vérifier le coefficient d'ajustement. On suppose que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ et que $\lambda\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$, que signifient ces hypothèses?
2.c Quelles est la valeur de λ_1 (en fonction de λ_2 , μ_1 et μ_2) lorsque le coefficient d'ajustement est égal à celui de la question 1.

Exercice 21. On considère un portefeuille modélisable un processus Poisson composé où

- les sinistres X_i sont indépendants et de même loi exponentielle F (d'espérance μ)
- le processus de comptage des sinistres $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

La prime d'assurance par unité de temps est égale à $c = (1+\beta)\lambda\mu$ où $\beta > 0$ est le coefficient de chargement. On note u le niveau des fonds propres à l'instant initial $t = 0$. Calculer la probabilité que la ruine aie lieu au premier sinistre. Comparer avec la probabilité de ruine sur un horizon infini.