

TD2: CREDIBILITÉ BAYÉSIENNE

Exercice 1 :

Un portefeuille d'assurance automobile est composé de 35% de bons conducteurs, 40% de conducteurs moyens et 25% de mauvais conducteurs. L'actuaire a estimé que les bons conducteurs ont, en moyenne, un accident tous les 10 ans, les moyens 2, et les mauvais 6. L'actuaire suppose de plus que la fréquence des accidents a une distribution de Poisson. Par souci de simplicité, les sinistres sont tous d'un montant de 1.

- i) Quelle est la probabilité qu'un assuré choisi au hasard ait un accident ?
- ii) Calculer la prime de risque pour chacun des 3 types de conducteurs (prime indiv.).
- iii) Calculer la prime collective.
- iv) Calculer la prime bayésienne de 6ème année d'un contrat ayant le dossier suivant au cours des 5 premières années, $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (1, 0, 1, 1, 0)$.

Exercice 2 :

Les employeurs couverts par le régime d'assurance médicament d'un assureur sont classés par ce dernier dans 3 groupes de taille égale. La probabilité de subir un sinistre dans une période pour chacun de ces 3 groupes est résumée dans le tableau suivant :

Groupe	Probabilité de sinistre
Fréquence faible	10%
Fréquence moyenne	20%
Fréquence élevée	40%

L'assureur suppose de plus que les sinistres sont indépendants à l'intérieur de chacun des groupes.

- i) Quelle est la probabilité qu'un employeur choisi au hasard dans ce portefeuille ait un sinistre ?
- ii) Après 2 années d'expérience, l'employeur choisi en i) (donc choisi au hasard) présente un dossier de sinistre vierge. A la lumière de ces résultats, quelle est la probabilité que cet employeur fasse partie du groupe à fréquence de sinistre faible ?
- iii) Quelle est maintenant la probabilité que l'employeur mentionné ci-dessus ait un sinistre lors de la 3ème année ?

Exercice 3 :

On demande à Camille d'élaborer un modèle pour la fréquence des sinistres au sein d'un portefeuille composé de 10 contrats. Incertaine quant à la probabilité d'avoir un accident, Camille estime à 20% la possibilité que la probabilité soit de 0,04 ; 60% qu'elle soit de 0,1 ; et 20% qu'elle soit de 0,16.

- i) Quel est le modèle de Camille pour N , le nombre total d'accidents du portefeuille au cours d'une année ?

- ii) Quelle est la probabilité qu'il y ait 0, 1 et 2 accidents au cours d'une année ?
- iii) Comparer ces résultats avec la situation où Camille serait certaine que la probabilité d'accident est de 0,1.

Exercice 4 :

Soit S la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres d'un contrat d'assurance au cours d'une année. Le nombre de sinistres a une distribution de Poisson de paramètre inconnu Θ . La densité de probabilité de Θ est la suivante :

$$u(\theta) = \frac{5}{4} \frac{1}{\theta^2}, \quad 1 < \theta < 5.$$

- i) Calculer $P(S = 2)$.
- ii) Calculer $P(S_3 = 0 | S_1 = 1, S_2 = 1)$.
- iii) Calculer la prime bayésienne de 3eme année étant donné l'expérience en ii).

Exercice 5 :

La compagnie TESS'ORO assure un groupe de maisons contre les incendies. Son actuaire, Gavino, a divisé les maisons en trois classes de risque équiprobable : A, B, et C. La probabilité qu'une maison prenne feu dans une année est de 0,25, quelque soit la classe. La distribution du montant à payer sachant qu'il y a eu incendie est donnée par

Montant du sinistre	Probabilité		
	Classe A	Classe B	Classe C
10 000	3/5	0	1/5
20 000	1/5	1/2	1/5
30 000	1/5	1/2	3/5

- i) Quelle est la prime bayésienne pour la 2eme année pour un assuré qui a eu un sinistre de 30000 euros l'année dernière ?

Exercice 6 :

Soit $S|\Theta \sim \text{Binomiale}(\nu, \Theta)$ et $\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

- i) Déterminer la prime de risque (individuelle).
- ii) Déterminer la prime collective.
- iii) Déterminer la distribution a posteriori de Θ après n années.
- iv) Déterminer la prime bayésienne pour la $(n + 1)$ e année et vérifier si celle-ci peut s'exprimer comme une prime de crédibilité ou non.

Exercice 7 :

Pour un certain modèle Poisson/gamma, on a

$$P(S_3 = s_3 | S_1 = 1, S_2 = 2) = C_{6+s_3}^{s_3} 0,9^7 0,1^{s_3}, \quad s_3 = 0, 1, \dots$$

Trouver la covariance entre S_1 et S_2 .

N.B. : il est conseillé de toujours interpréter ses résultats numériques et de leur donner un sens opérationnel pour vérifier leur cohérence...