

TD1: CREDIBILITÉ DE STABILITÉ

Exercice 1 : expérience crédible

On se donne l'expérience $S = (S_1, S_2, \dots, S_T)$. Interpréter l'inégalité suivante :

$$P(0,96E[S] \leq S \leq 1,04E[S]) \geq 0,95$$

Exercice 2 : modèle collectif

Le montant total des sinistres, S , a une distribution binomiale composée de paramètres $n = 1000$ et $\theta = 0,6$. La distribution des sinistres est une loi log-normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma = 4$.

- i) Trouver l'expression de l'espérance $E[S]$.
- ii) Trouver l'expression de la variance $Var(S)$.
- iii) Application numérique.

Exercice 3 : crédibilité d'une expérience et crédibilité d'une expérience moyenne

La sinistralité individuelle est donnée par un modèle fréquence-coût. La fréquence N suit une loi de Poisson, $N \sim \mathcal{P}(\lambda = 256)$. Le montant des sinistres suit lui une loi de Pareto, telle que $X \sim \text{Pareto}(\alpha = 3; \theta = 0,05)$. On rappelle que

$$E[X] = \frac{\theta}{\alpha - 1} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

- i) Quelle est la plus petite marge d'erreur admissible autour de $E[S]$ faisant toujours en sorte que S a une crédibilité complète à 90% ? Interpréter le résultat.
- ii) Quelle est la plus petite marge d'erreur admissible autour de $E[\bar{S}]$ faisant toujours en sorte que \bar{S} a une crédibilité complète à 90% après 10 années ? Interpréter le résultat. Rappel : $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_i S_i$.

Exercice 4 :

Sachant que la variable aléatoire S de l'expérience des contrats obéit à une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, trouver pour une période d'expérience la relation entre μ et σ pour avoir une crédibilité complète d'ordre (k, p) pour chacune des combinaisons de k et p suivantes :

- i) $(k = 0,04; p = 0,95)$
- ii) $(k = 0,05; p = 0,9)$
- iii) $(k = 0,01; p = 0,98)$

Exercice 5 :

Abder travaille au département de tarification d'une compagnie d'assurance automobile. A la suite d'une analyse de données exhaustive, Abder peut affirmer que la fréquence des sinistres pour ce type de produit a une distribution binomiale négative de paramètres r (inconnu) et $\theta = 0,01$. La sévérité des sinistres, quant à elle, suit une loi Gamma de paramètres $\alpha = 0,02$ et $\lambda = 1$.

- i) Trouver la plus petite valeur de r telle que le montant total des sinistres d'un contrat d'assurance automobile sera à plus ou moins 5% égal à sa moyenne, 19 fois sur 20.

Exercice 6 :

Soit S_j le montant total des sinistres pour un assuré à la période $j = 1, \dots, n$ tel que

$$S_j = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_j}$$

où X_1, X_2, \dots , sont les montants individuels des sinistres dont la distribution est dégénérée en M et N_j suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- i) Calculer le nombre total de sinistres espérés minimal pour accorder une crédibilité complète d'ordre ($k = 0,04; p = 0,9$) à l'expérience individuelle \bar{S} .

Exercice 7 :

Une compagnie d'assurance assure 2 groupes ayant la même loi de Poisson pour la fréquence de leurs sinistres individuels. Cependant, les individus du groupe A ne peuvent avoir que des sinistres de 50, alors que les individus du groupe B ont des sinistres obéissant à une loi Gamma de moyenne 50.

- i) Si l'on sait que l'observation de 1000 sinistres est suffisante pour accorder une crédibilité complète au groupe A et que 3000 sinistres sont nécessaires pour accorder une crédibilité complète de même ordre au groupe B, calculer les paramètres de la loi Gamma en question.

Exercice 8 :

Le montant total des sinistres a une distribution Poisson composée où les montants de sinistres individuels proviennent d'une loi Pareto de paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda = 100$ (paramètre de forme, puis seuil respectivement). Lorsque la largeur de l'intervalle de confiance autour de la moyenne est 5% de celle-ci, le seuil de crédibilité complète est 2500. On décide de changer la distribution de la fréquence des sinistres pour une binomiale négative avec $\theta = 0,5$.

- i) Si le seuil de crédibilité complète et le niveau de confiance de l'intervalle autour de la moyenne demeurent tous deux inchangés, quelle est la nouvelle largeur de l'intervalle de confiance ?

Exercice 9 :

L'actuaire de la compagnie "WOLOF Assurance" croit qu'il faudrait 3000 sinistres pour accorder une crédibilité complète à un assuré d'un groupe si la sévérité est constante. Après une étude, il se rend compte que la sévérité suit plutôt une loi de Pareto de moyenne 1000 avec $\alpha = 3$ (paramètre de forme).

- i) Si le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson, combien de sinistres doit-on avoir observé si l'on a accordé, après une période d'expérience, une crédibilité de 0,5 à l'expérience individuelle de l'assuré ?

Exercice 10 :

Les contrats "NANGADEF" d'une compagnie d'assurance sénégalaise pour un certain type de produit "MANGUI FI REK" ont les caractéristiques suivantes :

	Nombre de sinistres	Montant des sinistres
Espérance	10	5 000
Variance	10	6 250 000

Une crédibilité complète est accordée à l'expérience d'un contrat après n années si celle-ci se concentre dans un intervalle de 10% autour de sa moyenne avec probabilité 90%.

Déterminer après combien d'années d'expérience le facteur de crédibilité partielle sera de 0,54 selon chacune des formules de crédibilité partielles suivantes :

i) $z = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/2}$

i) $z = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{2/3}$

N.B. : il est conseillé de toujours interpréter ses résultats numériques et de leur donner un sens opérationnel pour vérifier leur cohérence...