
FEUILLE DE TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z .
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. Calculer les fonctions de répartition de X et Y .
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer $\mathbb{P}(a < Z < b)$.

Exercice 2

1. Soit X_0, X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de X_0, X_1, \dots, X_n . On pose

$$U = \sum_{i=0}^N X_i.$$

Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0 .

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N \geq 1. \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V . Quelle loi reconnaissez-vous?

Exercice 3

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i + Z_i \leq 1\}}$.

3. Notons $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que M_n converge en probabilité vers 1.

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Z est une variable positive. Pour $z > 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$ donc Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2. $\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x \leq y} \mu_{(X,Y)}(dx, dy) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3. Il est suffisant de montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$ borélien : $\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) &= \mathbb{P}(X \leq Y, X \in A) \\ &= \int_A \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx \\ &= \lambda \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(X \leq Y) = \int_A (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z) dz \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. X est une variable à valeurs dans \mathbb{N}^* et pour $x \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq [x]) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[x]}.$$

Pour Y on a pour tout y : $\mathbb{P}(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

5.

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq Y, X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)}.$$

6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y > k)$ car Y est à densité donc $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k}$.

7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, on a :

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(a < Y < b, X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b) \mathbb{P}(X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b)(1 - \mathbb{P}(X \leq \ell)) = (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(1-p)^\ell.$$

Exercice 2

1. On pose $U = \sum_{i=0}^N X_i$. $\phi_U(t) = \mathbb{E}[e^{itU}] = \mathbb{E}[e^{itU} (\sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{N=k})] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{j=0}^k X_j}] \mathbb{P}(N = k)$ on trouve alors facilement que $\phi_U(t) = \phi_{X_0}(t) (p\phi_{X_0}(t) + 1 - p)^n$.

2. On pose $V = \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \mathbf{1}_{N \geq 1}$. $G_V(s) = \mathbb{E}[s^V] = \mathbb{E}[s^V (\sum_{k=0}^\infty \mathbf{1}_{N=k})] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[s^V \mathbf{1}_{N=k}] =$

$\mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^k X_j} \mathbf{1}_{N=k}] = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^\infty (1-p+sp)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda p(s-1)}$. On reconnaît la loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 3

1. $\mathbb{E}[X^2 e^X] = 2e^{1/2}$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $2e^{1/2}$.
2. $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y+Z \leq 1}] = 1/2$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $1/2$.
3. Notons $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. On a pour $x < 0$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$ et pour $x > 1$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n = x^n$.
 $\mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \mathbf{1}_{0 < \varepsilon \leq 1}$. Donc cette probabilité tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

FEUILLE DE TD 10

Exercice 1

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence PFPFF (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi forte des grands nombres.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n , $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général $\max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c , alors la convergence a lieu en probabilité.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement). *Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $-X$, qui a même loi.*

Exercice 5 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $Z_n = 1/\bar{X}_n$.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers λ quand n tend vers ∞ .
2. En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de \bar{X}_n ?
3. Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0,95$.
4. En déduire un intervalle de la forme $I = [1/\lambda - \beta, 1/\lambda + \beta]$, avec β à déterminer, tel que $\mathbb{P}(\bar{X}_n \in I) = 0,95$.
5. En déduire ensuite un intervalle de la forme $J = [\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda]$, avec α_1, α_2 à déterminer, tel que $\mathbb{P}(Z_n \in J) = 0,95$.
6. Application numérique : calculer J , en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1,96$.

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 10

Exercice 1 $(X_n)_{n \geq 0}$ suite i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_n = F) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = P)$. On applique Borel-Cantelli aux événements indépendants

$$A_{5n} = \{(X_{5n}, X_{5n+1}, X_{5n+2}, X_{5n+3}, X_{5n+4}) = (P, F, P, F, F)\}$$

qui ont tous même proba de sorte que la série $\sum_n P(A_{5n})$ diverge grossièrement. La loi des grands nombres donne quant à elle la fréquence asymptotique d'apparition de la séquence : presque-sûrement,

$$\frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n \mid (X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, X_{k+3}, X_{k+4}) = (P, F, P, F, F)\} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq 5k \leq n} \mathbf{1}_{A_{5k}} + \dots + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq 5k+4 \leq n} \mathbf{1}_{A_{5k+4}}$$

(on découpe l'ensemble selon le résidu de k modulo 5 de façon à avoir des v.a. indépendantes).

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$.

1. Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$. (développer...)

2. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4\varepsilon^4} \sim_n \frac{3\mathbb{E}[X^2]^2}{n^2\varepsilon^4}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = 1/p$, par Borel-Cantelli, il existe p.s. n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$. Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on a : p.s., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$, c'est à dire que la suite $(S_n/n)_n$ converge vers 0.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_k > \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \ln n\right)^n \\ &= \exp(-n(1 + \lambda\varepsilon) \ln n) \rightarrow_n 0 \end{aligned}$$

et, si $\varepsilon < 1/\lambda$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} < -\varepsilon\right) = (1 - \exp(-(1 - \lambda\varepsilon) \ln n))^n = \exp(n \ln(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon\lambda}})) \rightarrow_n 0,$$

et cette proba est nulle si $\varepsilon > 1/\lambda$.

2. Pour $t \leq 0$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 0$ et on a, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \leq t) &= \mathbb{P}\left(X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \leq t\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{n}\right)^n \rightarrow_n e^{-e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Donc Z_n converge en loi vers la loi ayant pour fonction de répartition $F(t) = e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$. En dérivant, on voit que c'est aussi la loi de densité $\lambda e^{-\lambda t} e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$. Il s'agit d'une loi de Gumbel.

Exercice 4

1. Si $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable aléatoire constante c , alors : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon) \rightarrow_n 0$$

par convergence des fonctions de répartition aux points de continuité de la limite (ici, partout sauf en c).

2. X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors $-X$ a même loi, donc la suite $X_n = (-1)^n X$ converge en loi vers X ; or $X_n - X = 0$ si n est pair et $-2X$ si n est impair donc la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| > 1)$ ne converge pas vers 0.

Exercice 5

1. Par la loi des grands nombres (X_1 intégrable) on a $\bar{X}_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda$. Donc $Z_n \xrightarrow{ps} \lambda$.

2. Par le T.C.L. si $S_n = n\bar{X}_n$ alors

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma(X_1))$$

donc $\bar{X} \sim N(1/\lambda, \frac{1}{\sqrt{n}\lambda})$.

3. La fonction $x \mapsto \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$ est continue, croissante de 0 à 1 donc le théorème des valeurs intermédiaires (si I intervalle de \mathbb{R} et f définie sur I à valeurs réelles et continue alors $f(I)$ est un intervalle.)

4. $\sqrt{n}\lambda(\bar{X} - 1/\lambda) \sim N(0, 1)$ donc

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\lambda|\bar{X} - 1/\lambda| < \phi) = 0.95$$

c'est à dire $\mathbb{P}(|\bar{X} - 1/\lambda| < \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ donc $\beta = \phi/(\sqrt{n}\lambda)$.

5. $\mathbb{P}(1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda) \leq \bar{X} \leq 1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ est équivalent à

$$\mathbb{P}(\lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \leq Z_n \leq \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n}))) = 0.95$$

donc on pose

$$\alpha_1 = \lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n})).$$

6. $\phi/\sqrt{n} = 0.0196$ donc $\alpha_1 = 0.98$ et $\alpha_2 = 1.02$ d'où $J = [0.98\lambda, 1.02\lambda]$.