

On rappelle des résultats bien utiles dans le cadre de la convergence presque sûre, liés au lemme de Borel-Cantelli.

$$\bullet \liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

$w \in \liminf_n A_n \iff$  il existe  $n$  tel que  $w \in A_k$  pour tout  $k \geq n$ .

$\Rightarrow \liminf_n A_n$  contient tous les éléments  $w \in \Omega$  qui appartiennent à tous les  $A_n$  à partir d'un certain rang.

$$\bullet \limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

$w \in \limsup_n A_n \iff \forall n$ , il existe  $k(n) \geq n$  tel que  $w \in A_{k(n)}$ .

$\Rightarrow \limsup_n A_n$  contient les éléments  $w$  de  $\Omega$  qui appartiennent à une infinité de  $A_n$ .

• Pour une suite d'événements  $(A_n)_n$ :

$$- P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \text{ avec égalité si les } A_n \text{ sont 2 à 2 disjoints.}$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \text{ lorsque } (A_n)_n \text{ est } \uparrow.$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \text{ lorsque } (A_n)_n \text{ est } \downarrow.$$

$$\bullet \text{ On pose } \left. \begin{array}{l} I_n = \bigcap_{k \geq n} A_k \\ J_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 1} I_n \\ \limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 1} J_n \end{array}$$

$$P(\limsup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n)$$

$$P(\liminf_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(I_n)$$

• De plus,  $\forall n \quad I_n \subset A_n \subset J_n$

$P(\limsup_n A_n)$

Donc  $P(\liminf_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(I_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n)$

• Borel-Cantelli: -  $\sum_n P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$  :  $\omega$  appartient à au plus un nb fini de  $A_n$ .

-  $(A_n)$  mutuellement indépendants  $\left\{ \begin{array}{l} \sum_n P(A_n) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 1$  :  $\omega$  appartient à une infinité de  $A_n$ .

Exercice 1 Soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres réels tels que  $\forall n \geq 1$ , on a  $0 \leq u_n \leq 1$ .

Soit  $(X_n)_n$  suite de v.a.  $\perp$  l.p.  $\forall n \geq 1$ ,  $P(X_n = \frac{1}{u_n}) = u_n$  et  $P(X_n = 0) = 1 - u_n$ .

1. Calculer  $E(X_n)$

2. On suppose que  $\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$ . En déduire que  $X_n \xrightarrow{P} 0$ .

Montrer en fait que  $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

3. Montrer que la suite  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$  - Ce résultat est-il en contradiction avec la loi des grands nombres?

Solution: 1. On remarque que  $X_n \sim \mathcal{B}(u_n)$  avec  $\Omega = \{0; \frac{1}{u_n}\}$ .

Donc  $E(X_n) = 0 \times (1 - u_n) + \frac{1}{u_n} \times u_n = 1$ .

2.  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > \epsilon) = ?$

Or  $\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$ , donc la suite  $(u_n)_n \rightarrow 0$ , et donc  $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$ .

Donc pour  $\epsilon$  fixé et  $n$  assez grand,  $P(X_n > \epsilon) = P(X_n = \frac{1}{u_n}) = u_n \rightarrow 0$   
D'où  $X_n \xrightarrow{P} 0$ .



Pour la convergence presque sûre, prenons les ensembles

(2)

$$A_n = \{ |X_n| > \varepsilon \}.$$

Par hypothèse,  $\sum_n P(A_n) < +\infty$ . Donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$P(\limsup_n A_n) = 0$  - Presque sûrement, au plus un nombre fini de  $A_n$  sont réalisés ... d'où  $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

3 - Par le lemme de Césaro, lorsque la suite  $(a_n)_n$  a une limite, la moyenne de Césaro (moyenne arithmétique des  $n$  premiers termes de la suite) possède la même limite.

Ici, on sait que  $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ , donc  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0$ .

Non, ce résultat n'est pas contradictoire avec la loi des grands nombres: en effet, ici, les v.a.  $X_n$  ne sont pas de même loi.

**Exercice 2** Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.  $\perp$  de même loi, intégrables. Posons  $E[X] = a$ .

Soit  $f$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$ .

1 - Montrer que  $f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \rightarrow f(a)$  p.s.

2 - Montrer que  $E\left[f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ .

3 - Soit  $g \in C([0,1])$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ , où  $I_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 g\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$ .

4 - En utilisant des v.a. de loi exponentielle de param.  $\frac{1}{a}$ , montrer que

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{a}\right)^n F^{(n-1)}\left(\frac{n}{a}\right)$$

où  $F(t) = \int_0^\infty f(x) e^{-tx} dx$ . On pourra montrer que  $\sum_{i=1}^n \underbrace{E_i(x)}_{\perp} \sim \text{Gamma}(n, a)$ , de densité  $x \mapsto \frac{x^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}$  pour  $x > 0$ .



Solution: 1. La loi des grands nombres implique que  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E[X] = a$ ,  
et puisque  $f$  est continue et bornée, on a bien  $f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{p.s.} f(a)$ .

2. On va utiliser le théorème de convergence dominée (de Lebesgue):

en effet, on a 
$$\left. \begin{array}{l} f(M_n) \xrightarrow{p.s.} f(a) \\ X_n \in L^1 \\ f \text{ continue et bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(M_n) \text{ intégrables et bornées} \\ E[|f(M_n) - f(a)|] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{array}$$

et donc  $E[f(M_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ .

3. On rappelle que  $f \in C([0,1])$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $[0,1]$ .

Supposons que les  $X_i \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow E[X_i] = \frac{1}{2} (= a)$  donc  $f$  continue et bornée.

On cherche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]^n} f(m_n) dx_1 \dots dx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[g(M_n)]$

car la densité de  $X_i$  vaut  $\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

En appliquant la question 2, on trouve:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

4. On sait que  $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\left[f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right]$ .

Par ailleurs, on admet que la somme de lois  $\text{Exp}(\alpha)$  se comporte comme une loi  $\text{Gamma}(n, \alpha)$  (se démontre par récurrence). On a ainsi: si  $X_1 \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{a}\right)$

alors  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{a}\right)$ . D'où on cherche l'espérance d'une Gamma:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E\left[f\left(\frac{1}{n} \underbrace{(X_1 + \dots + X_n)}_{Z \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{a}\right)}\right)\right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{f(z)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{a}\right)^n}_{\frac{1}{(n-1)!}} z^{n-1} e^{-\frac{1}{a}z} dz & t = \frac{z}{n} \Rightarrow dz = n dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n (n-1)!} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{z}{n}\right) z^{n-1} e^{-\frac{z}{a}} dz \stackrel{t = \frac{z}{n}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n (n-1)!} \int_0^{+\infty} f(t) n^{n-1} t^{n-1} e^{-\frac{nt}{a}} n dt. \end{aligned}$$

En posant  $F(t) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx$ , on obtient  $F^{(n-1)}\left(\frac{n}{a}\right) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} f(t) t^{n-1} e^{-\frac{nt}{a}} dt \Rightarrow \text{résultat!}$



Exercice 3

Soit  $g$  une fonction mesurable telle que  $0 \leq g \leq 1$ .

On souhaite calculer  $m = \int_0^1 g(x) dx$ .

Soit  $X$  et  $Y$  des v.a.  $\perp$  et de même loi, uniforme sur  $[0,1]$  et

$$U = \mathbb{1}_{Y \leq g(X)}, \quad V = g(X) \quad \text{et} \quad W = \frac{g(X) + g(1-X)}{2}.$$

- 1- Calculer l'espérance et la variance de  $U, V$  et  $W$ .
- 2- Proposer au moins une méthode pour calculer  $m$ . On suppose ensuite que  $g$  monotone.
- 3- Montrer que  $(g(x) - g(y))(g(1-x) - g(1-y)) \leq 0 \quad \forall (x,y)$ . En déduire que

$$\mathbb{E}[g(X)g(1-X)] = \int_0^1 g(x)g(1-x) dx \leq m^2 \leq \int_0^1 g(x)^2 dx.$$

Comparer les variances de  $U, V$  et  $W$ .

4- Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de v.a. iid, de loi  $\mathcal{U}([0,1])$  - lequel des

estimateurs  $A_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} g(X_i)$  et  $B_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (g(X_i) + g(1-X_i))$

est le meilleur pour calculer  $m$ ?

Solution: 1-  $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y \leq g(X)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{Y \leq g(x)} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \dots$

•  $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = m.$

•  $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}\left[\frac{g(X) + g(1-X)}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[g(X)] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[g(\underbrace{1-X}_{\sim \mathcal{U}([0,1])})] = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m$

•  $\mathbb{E}[U] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{Y \leq g(x)} f_X(x) f_Y(y) dx dy$  car  $X \perp Y$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{Y \leq g(x)} f_Y(y) dy \right) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^1 \mathbb{1}_{y \leq g(x)} dy \right) f_X(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = m.$$

Hes la  $\hat{m}$  espérance



- $\text{Var}(U) = \text{Var}(\mathbb{1}_{Y \leq g(X)}) = E[\mathbb{1}_{Y \leq g(X)}^2] - (E[\mathbb{1}_{Y \leq g(X)}])^2$

Surfact  $U \sim \text{Bernoulli}$ , de moyenne  $m$ . Donc  $\text{Var}(U) = m(1-m)$ .

- $\text{Var}(V) = \text{Var}(g(X)) = E[(g(X))^2] - \underbrace{(E[g(X)])^2}_{=m^2} = E[(g(X))^2] - m^2$

avec  $E[(g(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 g^2(x) dx \Rightarrow \text{Var}(V) = \int_0^1 g^2(x) dx - m^2$ .

On remarque que  $\text{Var}(V) = \int_0^1 g^2(x) dx - m^2$

$\text{Var}(U) = m - m^2$

$m = \int_0^1 g(x) dx$  et  $\boxed{g \in [0,1]}$   
 $\log^2 \leq g$

$\Rightarrow \text{Var}(V) \leq \text{Var}(U)$ .

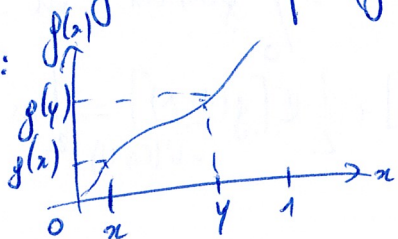
- $\text{Var}(W) = \text{Var}\left(\frac{1}{2}(g(X) + g(1-X))\right) = E\left[\left(\frac{1}{2}(g(X) + g(1-X))\right)^2\right] - \underbrace{\left(E\left[\frac{1}{2}(g(X) + g(1-X))\right]\right)^2}_{=m^2}$   
 $= E\left[\frac{1}{4}(\underbrace{g^2(X) + 2g(X)g(1-X)}_{\text{m comportement}} + g^2(1-X))\right] - m^2 = E\left[\frac{1}{4}(2g^2(X) + 2g(X)g(1-X))\right] - m^2 = E\left[\frac{1}{2}(g^2(X) + g(X)g(1-X))\right] - m^2$   
 $= \frac{1}{2} \int_0^1 (g^2(x) + g(1-x)g(x)) dx - m^2$

2 - Soient  $X_i$  et  $Y_i$  des v.a. iid, de loi  $U[0,1]$ . On peut appliquer la loi des grands nombres aux v.a.  $U_i, V_i$ , et  $W_i$ . On aura donc :

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow{\text{p.s.}} m$ , ou  $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (g(X_i) + g(1-X_i)) \xrightarrow{\text{p.s.}} m$ , ou encore  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_i \leq g(X_i)} \xrightarrow{\text{p.s.}} m$ .

3 - La monotonie de  $g$  entraîne que  $(g(x) - g(y))(g(1-x) - g(1-y)) \leq 0 \quad \forall x, y \in [0,1]^2$

Par un schéma :



on le voit directement.

On a le même résultat par passage à l'épreuve.

Ainsi,  $E[(g(X) - g(Y))(g(1-X) - g(1-Y))] \leq 0$ . Donc  $E[g(X)g(1-X) - g(X)g(1-Y) - g(Y)g(1-X) + g(Y)g(1-Y)] \leq 0$

Or  $X$  et  $Y \sim \text{Unif}(0,1)$  et jouent le même rôle symétrique, donc

$E[2g(X)g(1-X) - 2g(Y)g(1-X)] \leq 0 \Rightarrow 2E[g(X)g(1-X)] - 2E[g(Y)g(1-X)] \leq 0$ .

$$\text{Or } E[g(Y)g(1-X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)g(1-x) f_{(X,Y)}(x,y) dx dy \quad (4)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)g(1-x) f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)g(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = E[g(X)] E[g(Y)] = m^2.$$

$$\text{Donc } E[g(X)g(1-X)] \leq m^2.$$

$$\text{Par ailleurs, } m^2 \leq \int_0^1 g^2(x) dx \text{ car on avait } \begin{cases} \text{Var}(V) = \int_0^1 g^2(x) dx - m^2 \\ \text{Var}(V) \geq 0. \end{cases}$$

On obtient donc finalement:

$$* \text{Var}(U) \geq \text{Var}(V)$$

$$* \text{Var}(V) = \int_0^1 g^2(x) dx - m^2$$

$$* \text{Var}(W) = \frac{1}{2} \int_0^1 (g^2(x) + g(1-x)g(x)) dx - m^2$$

$$* E[g(X)g(1-X)] \leq m^2$$

$$\text{donc } \text{Var}(W) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 g^2(x) dx + \underbrace{\int_0^1 g(1-x)g(x) dx}_{E[g(X)g(1-X)] \leq m^2} \right] - m^2 \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 g^2(x) dx + m^2 \right) - m^2$$

$$\text{d'où } \text{Var}(W) \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left( \int_0^1 g^2(x) dx - m^2 \right)}_{\text{Var}(V)} = \frac{1}{2} \text{Var}(V)$$

Ainsi  $\text{Var}(W) \leq \frac{1}{2} \text{Var}(V) \Rightarrow W$  a la plus petite variance.



4 - Au vu des résultats précédents, c'est à dire:  $\text{Var}(W) \leq \frac{1}{2} \text{Var}(V)$ ,  
et en constatant que

- $A_n$  est un estimateur fortement consistant de  $E[g(X)] = E[V]$
- $B_n$  est un estimateur fortement consistant de  $E\left[\frac{1}{2}(g(X) + g(1-X))\right] = E[W]$
- $\text{Var}(A_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} g(X_i)\right) = \frac{1}{4n^2} \times 2n \times \text{Var}(g(X)) = \frac{1}{2n} \text{Var}(V)$
- $\text{Var}(B_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (g(X_i) + g(1-X_i))\right) = \frac{1}{n^2} \times \text{Var}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g(X_i) + g(1-X_i))\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(W)$

$$\text{donc } \text{Var}(B_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(W) \leq \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} \text{Var}(V) = \frac{1}{2n^2} \text{Var}(V)$$

$$\text{Donc } \text{Var}(A_n) = \frac{1}{2n} \text{Var}(V)$$

$$\text{Var}(B_n) = \frac{1}{2n^2} \text{Var}(V)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow B_n \text{ est un estimateur de plus faible} \\ \text{variance} \Rightarrow \text{il est meilleur.} \end{array} \right.$