

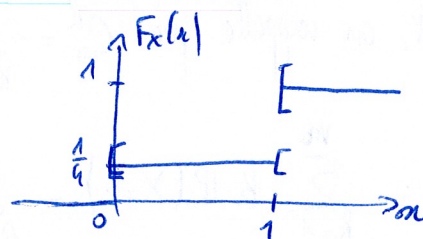
Exercice 1 Donner l'expression et tracer les fonctions de répartition (FDR) des lois de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$ puis de la loi Géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

On rappelle que: $X \sim B(p)$ avec $p \in [0,1]$: $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.

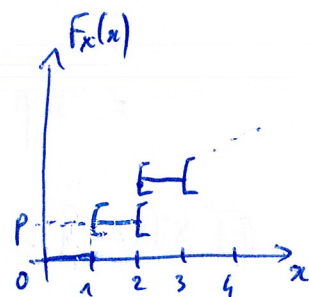
$X \sim \text{Géo}(p)$ avec $p \in [0,1]$: $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution: La FDR est donnée par $F_X(x) = P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$. Ici, dans le cas de v.a. discrètes, on peut noter $F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{m=0}^k P(X=m)$.

• pour $X \sim B(p)$:
 $X \in \{0,1\}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$


• pour $X \sim \text{Géo}(p)$:
 X à valeurs dans \mathbb{N}^*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ P(X=1) = p & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ P(X=1) + P(X=2) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \dots & \end{cases}$$


Exercice 2

1- Rappeler la formule du binôme de Newton.

2- En déduire que la loi binomiale de paramètre $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ définit bien une loi de probabilité, puis calculer sa moyenne et variance.

3- Rappeler le comportement des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a^{n-2}$ avec $|a| < 1$.

4- En déduire que la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définit bien une loi de probabilité, et donner sa moyenne et sa variance.

Solution: 1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}.$$

2. Pour vérifier que $P(X=k) = a_k$ (avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$) définit bien une mesure de proba sur \mathbb{N} , il faut avoir

$$\begin{cases} a_k \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \end{cases}.$$

• Si $X \sim B(k, p)$ alors $P(X=m) = C_k^m p^m (1-p)^{k-m}$.

$\Rightarrow a_k \geq 0$ évident, et $\sum_{m=0}^{\infty} P(X=m) = \sum_{m=0}^{\infty} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} = (p + (1-p))^k = 1$.
 \Rightarrow c'est bien une proba.

Pour les calculs de moments, on utilise que $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ et $k(k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}$.
 [En effet, on rappelle que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (nb de combinaisons de k éléments parmi n éléments)]

$$E[X] = \sum_{k=1}^n k P(X=k) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = np \times 1 \text{ par le binôme de Newton.}$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) p^2.$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

3. Lorsque $a \neq 1$, on a $\forall n, \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Pour $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ CV et $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Par propriété de dérivation des séries entières dans leur intervalle ouvert de convergence, on déduit:

$$\sum_{k \geq 1} k a^{k-1} = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{(1-a)^2} \text{ et } \sum_{k \geq 2} k(k-1) a^{k-2} = \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{2}{(1-a)^3}.$$

4. On rappelle que si $X \sim \text{Geo}(p)$, alors X est à valeurs dans \mathbb{N}^* et (2)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad \forall k \geq 1.$$

Ainsi $\sum_{k \geq 1} P(X=k) = \sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1} p = p \underbrace{\sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1}}_{\text{série géo de raison } 1-p, |1-p| < 1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$

\Rightarrow C'est une probabilité.

On calcule maintenant les moments: (en utilisant les résultats précédents sur les dérivées).

$$E[X] = \sum_{k \geq 1} k P(X=k) = p \sum_{k \geq 1} k (1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k \geq 2} k(k-1) P(X=k) = p(1-p) \sum_{k \geq 2} k(k-1) (1-p)^{k-2} = 2 \frac{1-p}{p^2}.$$

Ainsi $\text{Var}(X) = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = 2 \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$

Exercice 3

Un événement A survient avec une probabilité $p \in]0,1[$ au cours d'une expérience. On répète indépendamment l'expérience jusqu'à obtenir r fois l'événement A . Introduisons la v.e. X associée au nombre de réalisations de A^c . Quelle est la loi de X ?

Solution: L'espace d'états $\Omega = \{A, A^c\}^{\mathbb{N}}$. L'événement $\{A, A, \dots, A, A^c, \dots, A^c\}$ où A apparaît r fois et A^c n fois dans $r+n$ premières réalisations r répétitions a une probabilité $p^r (1-p)^n$ de se réaliser. Pour trouver $P(X=n)$, il faut calculer le nb de manières de construire des $(r+n)$ uplets se terminant par A et contenant r fois A . C'est donc le nb de combinaisons de $r-1$ éléments parmi $n+r-1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}; P(X=n) = C_{n+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^n.$

\Rightarrow C'est la loi binomiale négative de paramètres $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Exercice 4 Calcul de fonctions génératrices (FG).

Calculer la FG de X lorsque X est une v.a.

1- de loi de Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

2- de loi binomiale: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

3- de loi de Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

Pour chaque loi, en déduire espérance et variance.

Solution: On rappelle que la fonction génératrice est définie $\forall s \in]0, 1[$

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k P(X=k).$$

1- $G_X(s) = s^0 P(X=0) + s^1 P(X=1) = (1-p) + ps$

Ainsi $\left. \begin{array}{l} G'_X(s) = p \\ G''_X(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G'_X(1) = p \\ G''_X(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E[X] = p \\ \text{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p) \end{array} \right.$

2- $G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n s^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (1-p+sp)^n$

Ainsi $\left. \begin{array}{l} G'_X(s) = np(1-p+sp)^{n-1} \\ G''_X(s) = p^2 n(n-1)(1-p+sp)^{n-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} G'_X(1) = np \\ G''_X(1) = n(n-1)p^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E[X] = np \\ \text{Var}(X) = G''_X(1) - G'_X(1)^2 + G'_X(1)^2 \end{array} \right.$

d'où $\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 - (np)^2 + np$
 $= n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2 + np = np - np^2 = np(1-p).$

3- $G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, car $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Notons que le développement en série de l'exponentielle $e^\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ (et aussi $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0$) garantit que c'est une proba.

$$G_X(s) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \Rightarrow \begin{array}{l} G'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \\ G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \end{array}$$

Ainsi, $E[X] = G'_X(1) = \lambda$
 $\text{Var}(X) = G''_X(1) - G'_X(1)^2 + G'_X(1)^2 = \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda = \lambda.$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire dans une urne n fois (avec remise dans l'urne à chaque fois) une boule. L'urne contient 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit X_n la v.a. comptant le nb de boules vertes tirées parmi les n tirages. Posons $F_n = \frac{1}{n} X_n$.

1. Quelle est la loi de X_n ? En déduire espérance et variance de X_n , puis F_n .
2. On suppose $n = 10000$. Donner une borne inférieure pour la proba. de l'événement $A_n = \{F_n \in]0,22; 0,26[\}$. (indice: utiliser inégalité de Markov).
3. Donner une estimation du nombre minimal de tirages nécessaires pour que la proba. de l'événement A_n soit au moins 0,99.

Solution: 1. $X_n \sim \mathcal{B}(n, p = \frac{1}{4})$, donc $\begin{cases} E[X_n] = n/4 \\ \text{Var}(X_n) = np(1-p) = 3n/16 \end{cases}$

D'où $E[F_n] = E[\frac{1}{n} X_n] = \frac{1}{n} E[X_n] = \frac{1}{4}$.

$\text{Var}(F_n) = \text{Var}(\frac{1}{n} X_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_n) = \frac{3}{16n}$.

2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev: soit $a > 0$, si $X \in L^2$ (B-T)

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

En prenant $(X = F_n, n = 10000)$, $P(F_n \in]0,22; 0,26[) = P((F_n - E[F_n]) \in]-0,03; 0,01[)$

Or $P(F_n - E[F_n] \in]-0,03; 0,01[) > P(|F_n - E[F_n]| < 0,01)$, donc

$$P(F_n \in]0,22; 0,26[) > 1 - P(|F_n - E[F_n]| \geq 0,01) \stackrel{\text{B-T}}{\geq} 1 - \frac{\text{Var}(F_n)}{0,01^2} = \frac{13}{16}.$$

3. On a vu que $P(F_n \in]0,22; 0,26[) > P(|F_n - E[F_n]| < 0,01)$, or si

$P(|F_n - E[F_n]| < 0,01) > 0,99$, alors on aura $P(F_n \in]0,22; 0,26[) > 0,99$. Il suffit donc de chercher n t.q. $P(|F_n - E[F_n]| \geq 0,01) < 0,01$, or $P(|F_n - E[F_n]| \geq 0,01) < \frac{\text{Var}(F_n)}{0,01^2} \Rightarrow n > \frac{3}{16 \times 0,01^2}$

Exercice 6 Soit (Ω, \mathcal{P}) un espace de probabilité discret.

Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $1_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la fonct indicatrice de A : $\forall \omega \in \Omega, 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$.

1. Pour des événements A et B , exprimer 1_{A^c} et $1_{A \cap B}$ en fonction de 1_A et 1_B .
2. Vérifier que, pour tout événement A , $P(A) = E[1_A]$.
3. Montrer que si X est une v.a. intégrable à valeurs dans \mathbb{N} , $E[X] = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$.

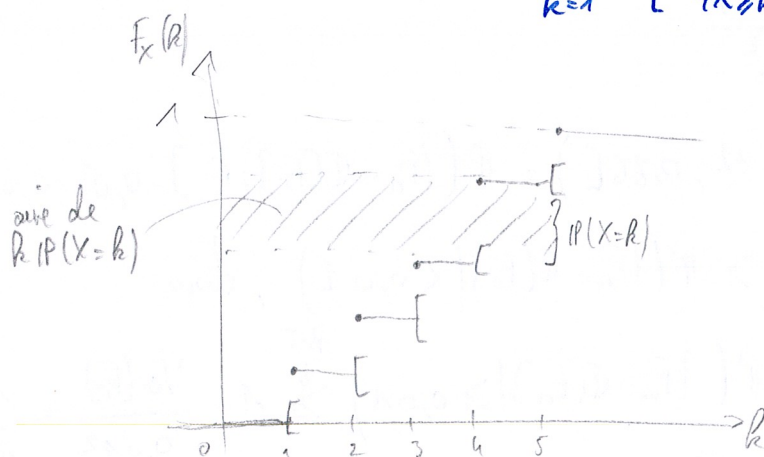
Solution: 1. On déduit facilement $\begin{cases} 1_{A^c} = 1 - 1_A \\ 1_{A \cap B} = 1_A 1_B \end{cases}$.

2. $E[1_A] = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A)$. (définition de l'espérance).

3. X est intégrable, à valeurs dans \mathbb{N} . Ainsi $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

$$\text{Ainsi } \forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \sum_{k=1}^{X(\omega)} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{X \geq k\}}(\omega) -$$

Par le théorème de la convergence dominée (les sommes partielles sont $\leq X$, intégrables), on obtient $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[1_{\{X \geq k\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.



$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_k k P(X=k) \\ &= \int_x (1 - F_X(x)) dx \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{m aire} \end{array} \right.$$

Exercice 7 Si X est une v.a. \perp de Y , et si Y est une v.a. \perp de Z , a-t-on $X \perp Z$?

Solution Non, il suffit de prendre un contre-exemple. Considérons par exemple $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la probabilité uniforme; et considérons $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$. Alors A et B sont \perp , comme B et C .
 A et C ne sont en revanche pas indépendants...

Autre solution: Soit A et B deux événements \perp . Par commutativité, B et A le sont aussi. Cependant A et A ne sont pas \perp car si c'était le cas: $\downarrow A \perp B \Rightarrow B \perp A$
si transitif: $\Rightarrow A \perp A$
 $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$, vérifié uniquement si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$!

Exercice 8 Soit $X \perp Y$ deux v.a. suivant des lois géométriques de paramètres p_x et p_y . On définit $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer les FDR de X, Y et Z .

2. En déduire la loi de Z .

Solution: 1. On rappelle que si $N \sim \text{géométrique}(p)$, alors $P(N=k) = (1-p)^{k-1} p$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ donc } F_X(x) = P(X \leq x) &= \sum_{k=1}^{L(x)} P(X=k) = 1 - P(X > k) = 1 - (1-p_x)^k \\ &= \begin{cases} 1 - (1-p_x)^k & \text{si } x > 0 \text{ et } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

• Même FDR pour $F_Y(y)$ avec p_x devient p_y .

$$\begin{aligned} \bullet P(Z \leq z) &= P(\min(X, Y) \leq z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P(X > z, Y > z) \\ &= \begin{cases} 1 - (1-p_x)^k (1-p_y)^k & \text{si } z > 0 \text{ et } k \leq z < k+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. Z \sim \text{géométrique}(p_Z = 1 - (1-p_x)(1-p_y) = p_x + p_y - p_x p_y)$$

Exercice 9 Soient $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ deux v.a. de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.

2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue.

Solution : 1. On rappelle que si X est intégrable, $\forall s \in (0,1]$ $G_X(s) = E[s^X]$.

On voit bien que $G_{X_1+X_2}(s) = E[s^{X_1+X_2}] = E[s^{X_1} s^{X_2}] \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} G_{X_1}(s) G_{X_2}(s)$

Ainsi, si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ donc $G_{X_1}(s) = E[s^{X_1}] = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k P(X_1=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}$

donc $G_{X_1}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 s} = e^{\lambda_1(s-1)}$

De même, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ donc $G_{X_2}(s) = e^{\lambda_2(s-1)}$.

Ainsi $G_{X_1+X_2}(s) \stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} G_{X_1}(s) G_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$

d'où $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ puisque la fonction génératrice caractérise une loi.

2. On cherche $P(X_1=k | X_1+X_2=n) = \frac{P(X_1=k \cap X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$

$$\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \frac{P(X_1=k) P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{n-k}$$

\Rightarrow C'est une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$ $= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

Exercice 10 1. Quelle est la fonction génératrice de la loi Uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

2. Soient X_1 et X_2 des v.a. $\perp\!\!\!\perp$ à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1} G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

(5)

Indication: on remarquera que $G_{X_i}(s) = s \varphi_i(s)$ où φ_i est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle.

3. Peut-on piper deux dés \perp de façon à rendre H_0 les sommes entre 2 et 12 équiprobables?

Solution: 1. On a $\text{Card}(\Omega) = 11$ avec $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.

$$\forall s \in (0, 1], G_U(s) = E[s^U] = \sum_{k=2}^{12} s^k P(U=k) = \sum_{k=2}^{12} s^k \frac{1}{11} = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} s^k$$

$$\text{d'où } G_U(s) = \frac{1}{11} \times s \frac{1-s^{11}}{1-s} = \frac{s}{11} \frac{1-s^{11}}{1-s}.$$

suite géométrique
 $= s^2 \sum_{k=0}^{10} s^k$

2. Supposons que $G_{X_1} G_{X_2} = G_U$. Remarquons que pour $i=1, 2$:

$$G_{X_i}(s) = \sum_{j=1}^6 P(X_i=j) s^j = s \varphi_i(s),$$

où φ_i est un polynôme à coefficients réels, et que la condition $P(X_1+X_2=12) = \frac{1}{11}$ implique $\frac{1}{11} = P(X_1=6, X_2=6) = P(X_1=6) P(X_2=6)$ et donc que φ_i est de degré 5, impair. Par un argument de valeurs intermédiaires, les polynômes φ_1 et φ_2 ont donc chacun au moins une racine réelle. Or

$11 s \varphi_1(s) \varphi_2(s) = \frac{1-s^{11}}{1-s}$, et le polynôme de droite a pour racines les racines onzièmes de l'unité autres que 1, donc aucune n'est réelle:

\Rightarrow CONTRADICTION!

3. Tant que les dés sont \perp , on ne peut donc pas les piper pour atteindre l'objectif.

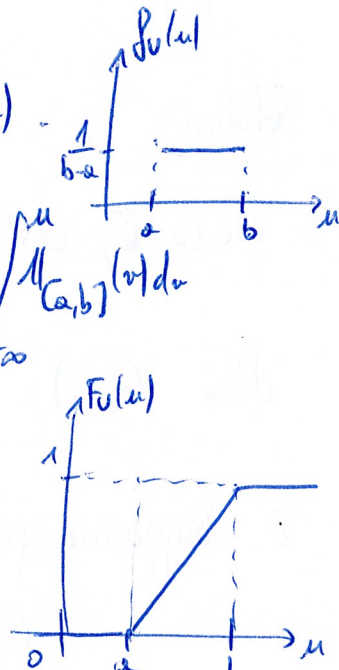
Exercice 11 Calculer l'espérance et la variance de X lorsque :

1. $X \sim U([a, b])$ où $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (loi Uniforme).
2. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. (loi exponentielle).
3. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Solution : 1. La densité de U vaut $f_U(u) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(u)$.

Par ailleurs $F_U(u) = \int_{-\infty}^u f_U(v) dv = \int_{-\infty}^u \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(v) dv = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^u \mathbb{1}_{[a, b]}(v) dv$

$$\text{donc } F_U(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^u \mathbb{1}_{[a, b]}(v) dv = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{si } a < u < b \\ 1 & \text{si } u \geq b \end{cases}$$



$\forall r > 0$, la fonction $|u|^r f_U(u)$ est bornée par $\frac{1}{b-a} \max(|a|, |b|)^r$, intégrable sur $[a, b] \Rightarrow U$ admet des moments de tout ordre.

$$\begin{aligned} \bullet E[U] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u f_U(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(u) du = \frac{1}{b-a} \int_a^b u du = \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{(b-a)(b+a)}{2} \right) = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{Var}(U) = E[U^2] - E[U]^2$$

$$E[U^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_U(u) du = \frac{1}{b-a} \int_a^b u^2 du = \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right), \text{ avec } a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$$

$$\text{donc } b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$$

$$\text{d'où } \text{Var}(U) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - (3a^2 + 6ab + 3b^2)}{12} = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2- Si $X \sim E(\lambda)$ alors $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. (6)

• Alors $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \text{IPP} :$

• $\text{Var}(X) = ?$ $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx =$

Exercice 12 Une v.a. ≥ 0 X est sans mémoire si

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Montrer qu'une v.a. positive dont la loi admet une densité est sans mémoire \Leftrightarrow cette loi est exponentielle.

Solution: On note f la densité de notre v.a., et on pose $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Comme $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, on sait que $\bar{F}(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

\bar{F} est différentiable (puisque la loi admet une densité) et $(\bar{F}(x))' = -f(x)$.

Le fait d'être sans mémoire donne:
$$\frac{\mathbb{P}(X > t+s, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \mathbb{P}(X > s)$$

donc $\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > s) \mathbb{P}(X > t)$

soit $\bar{F}(t+s) = \bar{F}(t) \bar{F}(s)$

Dériver cette équation par rapport à t , en $t=0$, donne $\bar{F}'(s) = -f(0) \bar{F}(s)$,

dont la solution est $\bar{F}(s) = c e^{-f(0)s}$. Donc $f(t) = c f(0) e^{-f(0)t}$ et $c=1$ est déterminé par la normalisation.

On reconnaît la densité d'une loi exponentielle ($X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$)

Exercice 13 Soient X_1, \dots, X_n des v.a. \perp de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Calculer la loi de $\max_{i=1, \dots, n} X_i$.
2. Calculer la loi de $\min_{i=1, \dots, n} X_i$.

Solution: 1- $\mathbb{P}(\max X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\perp}{=} (\mathbb{P}(X_i \leq x))^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$.

2- $\mathbb{P}(\min X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \stackrel{\perp}{=} 1 - (\mathbb{P}(X_i > x))^n$
 $= 1 - (e^{-\lambda x})^n = 1 - e^{-n\lambda x}$.

Exercice 14

(7)

Soit X une v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$.

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, et Y la v.a. $Y = f(X)$.

1. On suppose que X admet une densité, et que f est injective et C^1 par morceaux. Déterminer la densité de Y par un changement de variable.
2. On suppose que $X \sim \text{Unif}([0, 1])$, et $f(x) = -\ln x$. Quelle est la loi de Y ?
3. Si X est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, trouver une fonction f telle que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
4. Soit $U \sim \text{Unif}([0, \pi])$. Donner la loi de $\sin(U)$.
5. Soit $U \sim \text{Unif}([-1, 1])$. Donner la loi de a) $|U|$, b) U^2 , c) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+U}{1-U}$.

Solution : 1. $P(Y \in A) = P(f(X) \in A) = P(X \in f^{-1}(A))$.

En particulier $P(Y \in \mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$, et les autres axiomes.

On note p_X la densité de X . Rappelons que f est injective et C^1 .

$$P(Y \in A) = \int \mathbb{1}_A(f(t)) p_X(t) dt \stackrel{s=f(t)}{=} \int \mathbb{1}_A(s) \frac{p_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|} ds. \text{ On a donc comme}$$

$$\text{densité: } p_Y(s) = \frac{p_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|} \text{ (ou bien } p_Y = |f^{-1}'| p_X \circ f^{-1}).$$

2. En l'appliquant avec $p_X = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, $f^{-1}(s) = e^{-s} \Rightarrow f^{-1}'(s) = -e^{-s}$. Ainsi, $p_Y(s) = e^{-s} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(s)$, soit la loi exponentielle de paramètre 1.

3. Il faut prendre $f(x) = \frac{x-m}{\sigma}$.

4. On applique le théorème de transfert: si g est une fct. mesurable bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors

$$E[g(\sin U)] = \int_{\mathbb{R}} g(\sin u) \mu_U(du)$$

et

$$E[g(\sin U)] \stackrel{t=\sin u}{=} \int_{\mathbb{R}} g(t) \mu_{\sin U}(dt)$$

Par ailleurs, on sait que U a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(0, \pi)}(u)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(\sin u) \mu_U(du) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\sin u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin u) du \quad (\text{prop. fonct. sinus}).$$

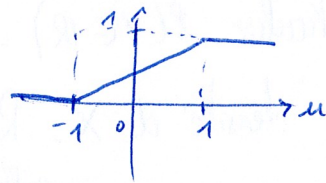
En posant $t = \sin u$, on a $u = \arcsin t$, et dérivée de $f(t) = \arcsin(t)$.

$$E[g(\sin U)] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Par conséquent, $\mu_{\sin U}(dt) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) dt$, donc la densité de $\sin U$ au point t par rapport à la mesure de Lebesgue est $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

5 - Ici, $U \sim \text{Unif}([-1, 1])$, donc

a) loi de $|U|$?



$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -1 \\ \frac{u+1}{2} & \text{si } -1 \leq u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

$$P(|U| \leq u) = P(-u \leq U \leq u) = F(u) - F(-u)$$

Exercice 15

Soit X et Y des v.a. positives, de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(8)

- 1- A quelle condition a-t-on $E[X^2] = 0$? On exclut cette possibilité dans la suite.
- 2- En considérant la fonction $\lambda \mapsto E[(X + \lambda Y)^2]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz: $E[XY]^2 \leq E[X^2] E[Y^2]$.
- 3- Montrer que $\forall \alpha \in [0, 1]$: $(1-\alpha)E[X] \leq E[X 1_{[\alpha E[X], \infty[}(X)]$.
- 4- En déduire que $\forall \alpha \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X \geq \alpha E[X]) \geq (1-\alpha) \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$.

Solution:

- 1- La v.a. X^2 est positive ou nulle, donc $E[X^2] = 0 \iff X^2$ est nulle presque sûrement, ou encore si $X = 0$ p.s..
- 2- La fonction $\lambda \mapsto E[(X + \lambda Y)^2] = E[X^2] + 2\lambda E[XY] + \lambda^2 E[Y^2]$ est un trinôme du second degré toujours ≥ 0 . \Rightarrow son discriminant est ≤ 0 . Ainsi
(b²-4ac) $(2E[XY])^2 - 4E[Y^2]E[X^2] \leq 0$, autrement dit $E[XY]^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$.
- 3- On sait que X est une v.a. positive, donc
 $1_{[\alpha E[X], \infty[}(X) = 1 - 1_{[0, \alpha E[X]]}(X)$.
Or $E[X 1_{[0, \alpha E[X]]}(X)] \leq \alpha E[X]$ (X vaut au plus $\alpha E[X]$ pour que l'indicatrice = 1)
donc $E[X 1_{[\alpha E[X], \infty[}(X)] \geq E[X] - \alpha E[X]$. CQFD.
- 4- Avec les 2 questions précédentes: par la question 3: $(1-\alpha)E[X] \leq E[X 1_{[\alpha E[X], \infty[}(X)]$
puis en utilisant la question 2 pour B : $(E[X 1_{[\alpha E[X], \infty[}(X)])^2 \leq E[X^2] E[1_{[\alpha E[X], \infty[}(X)]^2]$
En recombinaison A et C, on trouve:
 $(1-\alpha)^2 E[X]^2 \leq E[X^2] \mathbb{P}(X \geq \alpha E[X]) \iff \mathbb{P}(X \geq \alpha E[X]) \geq (1-\alpha)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$

Exercice 16

Soit X, Y des v.a. \perp , de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y) = (X, \overbrace{X^2 + Y^2}^Z)$.

2. En déduire la loi de $X^2 + Y^2$, puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.

3. Calculer $E[|X| | X^2 + Y^2]$.

4. On note $R = \sqrt{Z}$ et on définit $\Theta \in [0, 2\pi[$ par les équations :

$$\begin{cases} X = R \cos \Theta \\ Y = R \sin \Theta \end{cases}$$

- Déterminer la loi du couple (R, Θ) . Ces v.a. sont-elles \perp ? Retrouver alors rapidement le résultat de la question 3.

Solution : 1. Pour toute fonction bornée $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$E[f(X, Z)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, x^2 + y^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy \quad \text{car } X \perp Y.$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} f(x, x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{2\pi} dy dx, \quad \text{on pose } z = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{z - x^2}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2} (z - x^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{x^2}^{+\infty} f(x, z) e^{-\frac{z}{2}} \frac{dz}{2\sqrt{z - x^2}} \frac{dx}{2\pi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, z) \mathbb{1}_{\{z \geq x^2\}} \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi\sqrt{z - x^2}} dx dz \Rightarrow \text{La loi du couple } (X, Z) \text{ est de densité } f(x, z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi\sqrt{z - x^2}} \mathbb{1}_{\{z \geq x^2\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

$$2. f_2(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z - x^2}} e^{-\frac{z}{2}} \mathbb{1}_{\{z \geq x^2\}} dx$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z}{2}} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{z - x^2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z) \Rightarrow Z \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$$

← dérivée de $\arcsin \frac{x}{\sqrt{z}}$

• Pour la loi conditionnelle de $X|Z$, on a:

(9)

$$p(z, dx) = \int_{X|Z=z} (x) dx \text{ où, pour } z > 0$$

$$\int_{X|Z=z} (x) = \begin{cases} \frac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{\mathbb{1}_{\{|x| \leq \sqrt{z}\}}}{\sqrt{z-x^2}} \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{si } z \leq 0. \end{cases}$$

3 - On obtient:

$$E[|X| | Z] = \int_{\mathbb{R}} |x| \int_{X|Z} (x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \frac{x}{\sqrt{z-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} [-\sqrt{z-x^2}]_{x=0}^{\sqrt{z}} = \frac{2\sqrt{z}}{\pi}.$$

4 - On note $\phi: (x,y) \mapsto (r,\theta)$ l'application de passage en coordonnées polaires: c'est un C^1 -difféo de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \rightarrow]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, avec $|\mathcal{J}\phi^{-1}(r,\theta)| = r$.

Pour toute fonction mesurable bornée $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a donc:

$$E[f(R, \Theta)] = E[f(\phi(X,Y))] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\phi(x,y)) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \frac{dx dy}{2\pi} \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{Ainsi, } (R, \Theta) \text{ a pour densité}$$

$r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(r) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{]0, 2\pi[}(\theta)$ - R et Θ sont donc indépendantes (critère de factorisation de la densité), de lois respectives $r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(r)$ et la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

• La loi conditionnelle de $X|Z$ est la loi conditionnelle de $R \cos \Theta = \sqrt{Z} \cos \Theta$ sachant Z . Or Z et Θ sont \perp car $R = \sqrt{Z}$ et Θ le sont.

La loi de $X|Z=z$ est donc la loi de $\sqrt{z} \cos \Theta$, on a donc:

$$E[|X| | Z=z] = \sqrt{z} E[|\cos \Theta|] = \sqrt{z} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \frac{d\theta}{\pi} = \frac{2\sqrt{z}}{\pi}.$$

Exercice 17 Soient X_1 et X_2 des v.a. \perp , de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

1 - Calculer la loi de $X_1 + X_2$.

2 - Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue puis interpréter.

Solution : 1 - $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ - On va passer par les fonctions génératrices, données $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.
 $\forall s \in (0,1)$ par $G_X(s) = E[s^X]$.

On sait que si $X_1 \perp X_2$, $G_{X_1+X_2}(s) = G_{X_1}(s) G_{X_2}(s)$.

$$\text{Ici, } G_{X_1}(s) = E[s^{X_1}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!}$$

$$\text{d'où } G_{X_1}(s) = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 s} = e^{\lambda_1(s-1)}.$$

$$\text{Ainsi, } G_{X_1+X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} \Rightarrow X_1+X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2).$$

2 - On cherche $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_1=k | X_1+X_2=n)$.

$$P(X_1=k | X_1+X_2=n) = \frac{P(X_1=k, X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$\stackrel{X_1 \perp X_2}{=} \frac{P(X_1=k) P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = C_n^k \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$= C_n^k \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-k+k}} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{n-k}$$

\Rightarrow C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$ - Lorsque la somme de 2 lois de Poisson est connue, le nombre donné par une des 2 lois correspond au nombre de succès d'une binomiale qui a une probabilité $\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$ de se réaliser.