

Exercice 1: 1) Parmi  $n$  personnes en présence, quelle est la probabilité pour qu'au moins 2 personnes soient nées le même jour? (on précise que  $n \leq 365$ , et que on ne tient pas compte des années bissextiles).

Solution: On considère le complémentaire: "Personne n'est né le même jour." C'est maintenant de la pure combinatoire. On note  $P_n$  la proba. recherchée.

$$P_n = 1 - \left( \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{365 - (n-1)}{365} \right) = 1 - \left( \frac{365 \times 364 \times \dots \times 365 - n + 1}{365^n} \right)$$

la 1<sup>ère</sup> personne  
naît n'importe quel jour  
⇒ 365 possibilités

il reste 364  
possibilités pr  
la 2<sup>e</sup> personne

...

2) Que vaut cette probabilité pour  $n=4$ ?  $n=22$ ?  $n=40$ ?

Solution: pour  $n=4$  on obtient  $P_4 = 0,016$ ; puis  $P_{22} \approx 0,48$  et enfin  $P_{40} \approx 0,9$ .

Exercice 2 Soit  $a \in ]0, 1[$ . Montrer que la suite  $(p_n)_n$  telle que  $p_n = (1-a)a^{n-1}$  caractérise une probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

Solution: •  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n \in [0, 1]$

$$\bullet \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1-a)a^{n-1} = (1-a) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^{n-1} = (1-a) \frac{1}{1-a} = 1$$

Rq: il s'agit de la loi Géométrique!



Exercice 3 M. et M<sup>me</sup> KILUCRU ont 2 enfants, garçons ou filles.

Les 4 configurations sont équiprobables.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- 1) Sachant que nous n'avons aucune autre information.
- 2) Sachant que l'aînée est une fille ?

Solution: On note les événements  $F$ : "Avoir une fille" -  
 $G$ : "Avoir un garçon."

- 1) On sait que  $IP(F \cap F) = IP(F \cap G) = IP(G \cap F) \neq IP(G \cap G) = \frac{1}{4}$ .  
Ainsi, la proba. d'avoir 2 filles est  $\frac{1}{4}$ .

- 2) On affine les événements ; en considérant  $\left( \begin{array}{l} F_i: \text{"le } i^{\text{e}} \text{ enfant est une fille."} \\ G_i: \text{"le } i^{\text{e}} \text{ enfant est un garçon."} \end{array} \right.$   
On cherche donc  $P(F_1 \cap F_2 \mid F_1) =$

$$P(F_1 \cap F_2 | F_1) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap G_2)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 Lors de la reproduction, chaque parent transmet un gène de son génotype de façon équiprobable. Les génotypes sont déterminés par les allèles, où l'allèle  $A$  dominant est en proportion  $p$  dans la population, l'allèle  $a$  récessif en proportion  $1-p$ .

Il y a 3 génotypes possibles :  $\{AA, Aa, aa\}$  dans la génération suivante.

- 1) Quelle est la probabilité associée à chacun des 3 génotypes de la génération suivante?
- 2) Quelle est la proportion d'allèle A dans la 2<sup>e</sup> génération?



Solution :

(2)

1) On énumère les combinaisons possibles ; en profitant de l'hyp d'indépendance :

$$\begin{cases} P(AA) = p^2 & (\text{les 2 parents ont donné l'allèle A}) \\ P(aa) = (1-p)^2 = q^2 & (\text{les 2 parents ont donné l'allèle a}) \\ P(Aa) = 2p(1-p) & (\text{l'un des 2 parents donne A et l'autre a, ou inversement}) \end{cases}$$

2) Pour la 2<sup>e</sup> génération, on résume les possibilités en fonction des génotypes des 2 parents :

$$\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} AA \quad AA \\ \diagdown \quad \diagup \\ AA \end{array} & \begin{array}{c} AA \quad Aa \\ \diagdown \quad \diagup \\ AA \text{ ou } Aa \end{array} & \begin{array}{c} AA \quad aa \\ \diagdown \quad \diagup \\ Aa \end{array} & \begin{array}{c} AA \quad aA \\ \diagdown \quad \diagup \\ AA \text{ ou } Aa \end{array} \\ \hline & & & \end{array}$$

Ainsi, la proportion d'allèle A dans la 2<sup>e</sup> génération est donnée par :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | \text{indiv. de génotype } AA) P(AA) + P(A | \text{indiv. de génotype } Aa) P(Aa) \\ &= 1 \times p^2 + \frac{1}{2} \times 2pq \\ &= p^2 + pq = p(p+q) = p. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  On retrouve la même proportion qu'au départ !

### Exercice 5

L'hémophilie est transmise par la mère. La reine porte ce gène avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ . Si elle est porteuse, chaque prince aura 1 chance sur 2 de souffrir de cette maladie.

La reine a eu 3 fils non-hémophiles.

1) Quelle est la probabilité qu'elle porte le gène ?

2) Quelle est la probabilité que le 4<sup>e</sup> prince soit hémophile ?

### Solution :

1) On note les événements :

$H$  : "La reine porte le gène de l'hémophilie"

$P$  : "Le prince est hémophile."

$$\text{On a } \begin{cases} P(H) = 0,5 \\ P(P|H) = 0,5 \end{cases} \Rightarrow P(\bar{H}) = 0,5$$

$$\Rightarrow P(\bar{P}|H) = 0,5 \Rightarrow P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}|H) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ par II.}$$

On cherche  $P(H|\bar{P}, \bar{P}, \bar{P})$  :

$$P(H|\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) = \frac{P(H, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P})}{P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P})} = \frac{P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}|H) P(H)}{P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}}{P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P})}$$

$$\text{avec } P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) = P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}|H) P(H) + P(\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}|\bar{H}) P(\bar{H})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

$$\text{d'où } P(H|\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{9/2^4} = \frac{1}{9}$$

$$2) P(P|\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) = P(P|H) P(H|\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

### Exercice 6

Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Soient les événements :

$A$  : "Trois carreaux"

$C$  : "Un carreau et 2 non-carreaux"

$B$  : "Aucun carreau"

$D$  : "Au moins un carreau"

$E$  : "3 cartes de la même famille"

$F$  : "3 as"

$G$  : "3 cartes rouges"

Calculer les probabilités de ces événements en supposant :

1) Que les cartes sont tirées au hasard l'une après l'autre, avec remise dans le jeu.

2) Que les cartes sont tirées au hasard simultanément.



Solution: C'est un exercice de dénombrement.

(3)

1)  $P(A) = ?$

L'univers  $\Omega$  est  $\{1, \dots, 52\}^3$  donc  $\text{Card}(\Omega) = 52^3$ .

On munit  $\Omega$  de la probabilité uniforme  $P$  puisque les tirages se font au hasard. Ainsi, la proba d'un événement  $A$  vaut  $\text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega)$ .

$$\bullet P(A) = \frac{13^3}{52^3} = \frac{13 \times 13 \times 13}{4 \times 13 \times 4 \times 13 \times 4 \times 13} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

$$\bullet P(B) = \frac{39^3}{52^3} = \frac{3 \times 13 \times 3 \times 13 \times 3 \times 13}{4 \times 13 \times 4 \times 13 \times 4 \times 13} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

$$\bullet P(C) = \frac{3 \times 13 \times 39^2}{52^3} = \frac{27}{64} \text{ car le carreau peut arriver en 1}^{\text{ère}} \text{ carte, en 2}^{\text{e}} \text{ ou en 3}^{\text{e}} \text{ (d'où le facteur 3)}.$$

$$\bullet P(D) = 1 - P(B) = P(\bar{B}) = \frac{37}{64}.$$

$$\bullet P(E) = \frac{3 \times 13^3}{52^3} = \frac{1}{16}$$

$$\bullet P(G) = \frac{(13 \times 2) \text{ car } \begin{matrix} \nearrow \text{coeur} \\ \searrow \text{carreau} \end{matrix}}{52^3} = \frac{1}{8}.$$

$$\bullet P(F) = \frac{4^3}{52^3} = \frac{1}{2197}$$

2) Dans cette expérience,  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments parmi 52. Son cardinal vaut donc  $\text{Card}(\Omega) = C_{52}^3$ .

$$\bullet P(A) = \frac{C_{13}^3}{C_{52}^3}$$

$$\bullet P(B) = \frac{C_{39}^3}{C_{52}^3}$$

$$\bullet P(C) = \frac{C_3^1 C_{39}^2}{C_{52}^3}$$

$$\bullet P(D) = 1 - P(B)$$

$$\bullet P(E) = \frac{4 C_{13}^3}{C_{52}^3}$$

$$\bullet P(F) = \frac{4}{C_{52}^3}$$

$$\bullet P(G) = \frac{C_{26}^3}{C_{52}^3}$$



Exercice 7 Soient  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls.  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ .

- 1) Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens strict) de  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ .
- 2) Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes, au sens large, de  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ .

Solution:

- 1) L'ensemble des suites  $\uparrow$  strictement de  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$  est en bijection avec l'ensemble des parties à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . En effet, on peut associer à toute suite strictement  $\uparrow (s_1, \dots, s_p)$  une partie  $\{s_1, \dots, s_p\}$  à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . L'application réciproque consiste alors à ordonner les éléments de la partie  $\{s_1, \dots, s_p\}$ . Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments parmi est donc  $C_n^p$ .
- 2) Se donner une suite  $\uparrow$  au sens large de  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$  revient à se donner, pour  $i = 1, \dots, n$ , le nombre  $x_i$  d'éléments de la suite égaux à  $i$  avec la condition  $\sum_{i=1}^n x_i = p$  et  $x_i \geq 0$ . Il y a donc  $(n-1)$  possibilités parmi  $(n-1+p)$ , soit  $C_{n-1+p}^{n-1}$ .

Exercice 8 Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$  définie sur l'espace de probabilité discret  $(\Omega, \mathcal{P})$ . Démontrer que sa FDR, notée  $F_X$ , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{vérifie:}$$

- 1)  $F_X$  est  $\uparrow$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 2)  $F_X$  continue en tout point, admet des limites à gauche en tout point. De plus  $\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- 3)  $F_X$  caractérise la loi de  $X$ .



Solution:

(4)

1)  $F_x$  est croissante presque si  $x < y$ ,

$$F_x(y) = F_x(x) + \mu_x([x, y]) \geq F_x(x).$$

De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ]-\infty, -n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, -n] = \emptyset$  comme limite d'une suite décroissante d'ensembles et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} ]-\infty, n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, n] = \mathbb{R}$  comme limite d'une suite croissante d'ensembles.

$\Rightarrow$  par continuité de l'application probabilité, on obtient:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow -\infty} F_x(n) = P(\emptyset) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_x(n) = P(\mathbb{R}) = 1. \end{cases}$$

2)  $F_x$  est continue à droite car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ]-\infty; x + \frac{1}{n}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty; x + \frac{1}{n}] = ]-\infty; x]$ .

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ]-\infty; x - \frac{1}{n}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty; x - \frac{1}{n}] = ]-\infty; x[$ .

3) On a  $F_x(x) - F_x(x^-) = \mu_x(\{x\})$ . En particulier, on retrouve toutes les probabilités:

$$\mu_x(\{k\}) = P(X=k) = P(X^{-1}(\{k\})) = P(\{\omega, X(\omega)=k\}).$$

Exercice 9

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de v.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On rappelle que la densité s'exprime  $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ .

On pose  $Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}$ .

On veut montrer que  $Y = \frac{1}{\lambda}$  presque sûrement.



Pour cela :

- 1) Montrer que  $P\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) \leq P\left(\overbrace{\limsup_n \frac{X_n}{\ln n}}^{=Y} \geq \frac{1}{\lambda}\right)$
- 2) Montrer que  $P\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) = 1$  - En déduire que  $P(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$ .
- 3) Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, P\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\right) \leq P\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \right\}\right)$
- 4) Montrer que  $P\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \right\}\right) = 0$ . En déduire que  $P(Y > \frac{1+\varepsilon}{\lambda}) = 0$ .
- 5) En déduire que  $P(Y = \frac{1}{\lambda}) = 1$ .

Solution:

- 1) On rappelle que si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombre réels,  
$$\limsup_n x_n = \lim_n \left( \sup_{k \geq n} x_k \right).$$

Ainsi on peut montrer que :  $x_n \geq 0$  pour une infinité de  $n \Rightarrow \limsup_n x_n \geq 0$ .

On rappelle que les v.-a.  $X_k$  sont de loi exponentielle, donc à support dans  $\mathbb{R}^+$ .  
En effet,

Remarquer que d'un côté la  $\limsup$  s'applique à  $\left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}$  alors qu'elle ne s'applique qu'à  $\frac{X_n}{\ln n}$  de l'autre...



2) On rappelle que si  $(A_n)_n$  est une suite croissante, alors (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

De plus, on a  $P\left(\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = P\left(\left\{X_n \geq \frac{\ln n}{\lambda}\right\}\right) = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$

Donc  $\sum_n P\left(\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty.$

Les variables aléatoires étant indépendantes, et en appliquant Borel-Cantelli:

$$P\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = 1.$$

Combiné à la première question, on obtient finalement  $P(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$  puisque une probabilité est bornée par 1.

3) Comme en question 1, on utilise le fait que: soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. On sait que  $\limsup_n x_n = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} x_k\right)$ . Alors on a

$$\limsup_n x_n > 0 \Rightarrow x_n > 0 \text{ pour une infinité de } n.$$



4) On a maintenance:

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) = \sum_n n^{-(1+\epsilon)} < \infty.$$

En appliquant Borel-Cantelli,  $P\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda}(1+\varepsilon) \right\}\right) = 0$ .

En combinant avec la question 3), on obtient

$$P\left(Y > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)\right) = 0.$$

5) On fait tendre  $\varepsilon$  vers 0. On obtient par  $\delta$ -continuité que

$$P(Y > \frac{1}{\lambda}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$$

Ainsi, en remarquant que

$$P(Y = \frac{1}{\lambda}) = P(Y \geq \frac{1}{\lambda}) - P(Y > \frac{1}{\lambda}) = 1 - 0 = 1. \text{ (QED)}$$

## Exercise 10

Exercice 10 Soit une suite de parties II de Pile ou Face, avec proba. d'avoir "Pile" égale à  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $A$  un "mot" de longueur  $l$  choisi a priori, c-à-d une suite de  $l$  termes dont chaque lettre est P ou F. On désigne par  $A_1$ : "le mot se réalise dans les  $l$  premières parties".  
 $A_2$ : " " " " " " " les parties suivantes."  
 $A_3$ : " " " " " " " " " "

Montrer que la probabilité que le mot se réalise une infinité de fois au cours du jeu = 1.

Solution: Les événements  $A_1, A_2, \dots$  sont II. De plus,  $\forall n \geq 1$ , on a  $P(A_n) = P(A_1) > 0$ .  
D'où  $\sum_n P(A_n) = +\infty$ . Par Borel-Cantelli,  $P(\limsup_n A_n) = 1$ .

Da  $\sum_n P(A_n) = +\infty$  per Borel-Cantelli,  $P(\limsup_n A_n) = 1$ .

Ainsi, le mot se réalise une infinité de fois avec proba. 1.