METHODES DE TARIFICATION EN ASSURANCE

Partie 2: la crédibilité, tarification a posteriori

Xavier Milhaud

Affilé à l'Institut de Mathématique de Marseille (I2M),
MCF à Aix-Marseille Université

ENSEA Abidjan - Février 2023

Plan du cours

1. Introduction
   - Le contrat d'assurance et la tarification
   - Etude des risques en assurance basée sur l'expérience sinistre

Une police d'assurance est un contrat entre deux (ou 3) parties :

- $\rightarrow$ l'assuré, détenteur du contrat;
- $\rightarrow$ l'assureur, pourvoyeur du contrat;
- $\rightarrow$ (le bénéficiaire du contrat s'il est différent de l'assuré).

En échange de la couverture d'un risque par l'assureur, l'assuré verse une **prime** d'assurance.

En cas de sinistre, le bénéficiaire du contrat reçoit le montant contractuel prévu en cas de survenance du sinistre.

Ainsi le risque économique initialement supporté par l'assuré est transféré vers l'assureur.

La mutualisation induite par la souscription de nombreux contrats au sein d'une compagnie d'assurance permet l'utilisation grossière de la **loi des grands nombres**.

En effet,

- → un portefeuille d'assurance couvre un risque en particulier: les pertes sont considérées être de même loi de probabilité;
- → les contrats sont a priori indépendants les uns des autres.

Ces propriétés doivent permettre à l'assureur de prédire avec une précision relative les pertes encourues pour une période donnée.

Soit un portefeuille d'assurance contenant n polices. Notons la loi du $i^{\text{ème}}$ sinistre S_i (perte), et la loi des pertes agrégées S.

La LFGN stipule la CV presque sûre de la moyenne empirique de pertes i.i.d., notée $\bar{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$, vers l'espérance de la loi:

$$\boxed{\bar{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[S_i] = \mu.}$$

Ou encore: $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \mu\right) = 1.$

Ce résultat est à l'origine du **principe général de tarification**: la prime vaut au moins μ, aussi appelée prime pure du contrat.

En pratique l'assureur applique des **chargements** à cette prime, car mathématiquement sa ruine est certaine à horizon infini dès lors que la tarification respecte le strict principe d'équivalence.

La prime d'assurance se décompose donc en plusieurs parties:

→ la prime pure;

→ les chargements techniques (ou marge de risque MR):

$$\Pi(S) = \mathbb{E}[S] + MR(S);$$

→ les coûts:

- acquisition,
- administration et gestion du contrat,
- rémunération d'intermédiaires (courtiers, ...).

La stratégie de la compagnie peut également jouer sur la hauteur de ces chargements.

Objectif de l'assureur:

charger assez de primes pour payer les sinistres à venir, et distribuer équitablement ces primes entre les assurés.

Cela lui permettra

$\longrightarrow$ de déterminer la loi de probabilité de son résultat futur, sa probabilité de ruine, ou d'autres quantités d'intérêt.

$\longrightarrow$ de conserver les bons risques en appliquant une tarification "juste". Ceci peut être fait par segmentation (classification), ou par *experience-rating* (crédibilité).

1. Introduction
   - Le contrat d’assurance et la tarification
   - Etude des risques en assurance basée sur l’expérience sinistre

Une tarification à l’expérience

Lorsque l’on ne dispose pas d’informations individualisées sur les assurés (par exemple en assurance collective), on a souvent une information plus agrégée concernant la sinistralité globale d’un portefeuille.

L’idée est alors de tarifer les contrats en tenant compte de l’expérience de sinistralité des contrats. C’est l’idée de l’application d’un coefficient Bonus-Malus qui s’applique à une prime construite via un modèle de segmentation type GLM. Ici il n’y a donc pas de segmentation par profil !

Quelques ouvrages de référence en crédibilité

[1] H Buhlmann and A Gisler. *A course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, 2005.

[2] M Denuit and A Charpentier. *Mathematiques de l'assurance non-vie, volume II*. Economica, 2005.

[3] M J Goovaerts and J Hoogstad W. *Credibility theory*. Number 4 in Surveys of actuarial studies. Nationale-Nederlanden N.V., Netherlands, 1987.

[4] Vincent Goulet. Principles and application of credibility theory. *J. Actuar. Pract.*, 6:5–62, 1998.

[5] pages = 129–163 publisher = Academic Press series = Proceedings of the berkeley Actuarial Research Conference on Credibility title = Credibility for Regression Models with Application to Trend year = 1975 Hachemeister C A, booktitle = Credibility, theory Appl. New York.

[6] C Partrat and J L Besson. *Assurance non-vie*. Economica, 2004.

[7] S W Philbrick. An examination of credibility concepts. Proceedings of the CAS, pages 195–219. Academic Press, 1981.

2 Introduction à la théorie de la crédibilité

Apparition de cette théorie

C'est une théorie (abordée dans [3], [4], [5], [1], [2], [6], [7])

- développée par les écoles suisse et scandinave,
- apparue dans le domaine des accidents du travail au début des années 1900,
- qui repose sur les principes de l'inférence bayésienne (mise à jour de paramètres par prise en compte d'un historique),
- basée sur le principe de mutualisation: elle différencie les primes des assurés en fonction de leur sinistralité tout en tenant compte d'une prime "collective",
- traite de la tarification pour un portefeuille hétérogène.

Domaines d’application

La théorie de la crédibilité nécessite de disposer de beaucoup d’informations puisqu’elle exige un volume d’expérience important (pour apporter des résultats vraiment robustes).

Elle est donc surtout utilisée en

- accidents du travail,
- assurance auto...

Mais n’est pas vraiment applicable à

- assurance habitation (trop peu de sinistres),
- assurance vie (on ne disparait qu’une fois!).

Principe

Le principe de la théorie de la crédibilité est de prendre en compte l'expérience de l'assureur sur les contrats en portefeuille.

Années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
contrat 1											0
contrat 2											0
contrat 3	1		1								2
contrat 4											0
contrat 5						1			1		2
contrat 6											0
contrat 7		1	1								2
contrat 8											0
contrat 9		1	1		1	1	1			1	6
contrat 10			1								1
contrat 11	1	1			1				1		4
contrat 12						1		1		1	3
contrat 13									1		1
contrat 14								1			1
contrat 15											0
contrat 16											0
contrat 17	1	1		1			1			1	5
contrat 18	1										1
contrat 19										1	1
contrat 20											0

Constat de sinistralité hétérogène

Les sinistres sont considérés $=$ à 1, au $+$ un sinistre/contrat dans l'année, leur survenance suit une loi de Bernouilli de paramètre p.

- 29 sinistres dans le portefeuille sur les 10 ans d'observations;
- 10 ans d'observations sur 20 contrats différents;

$\Rightarrow$ **Sinistralité annuelle moyenne par contrat:** $29/200 = 0,145$**.**

Néanmoins, certains contrats sont **beaucoup plus risqués**:

- le contrat 9 a engendré 6 sinistres à lui tout seul; contrat 17...

Sans eux, la sinistralité moyenne annuelle serait $14/170 = 0,08$; et la prime serait donc bien moindre...

Antisélection et aléa moral

- Est-il normal que les détenteurs des contrats 9, 17, ..., paient la même prime que les autres?
- Ce portefeuille est-il **homogène**? → test du khi-deux.
- Une **prime collective est-elle justifiée** vu cette expérience?
  → tendance à faire partir les bons risques du portefeuille...

Les problématiques classiques d'assurance ressurgissent:

- aléa moral
  → modification comportement assuré sachant sa couverture;
- antisélection
  → information asymétrique entre assuré et assureur;

sont **susceptibles de modifier les espérances** de l'assureur.

Test de l'homogénéité entre contrats: le khi-deux

Soit p_i la probabilité qu'un sinistre survienne pour le contrat i, et p la moyenne des p_i. Leurs estimations sont fournies par leurs **moyennes empiriques**.

On désire tester

$$H_0 \;:\; p_0 = p_1 = ... = p_{20} \qquad \text{contre} \qquad H_1 \;:\; \text{alternative}$$

Sous H_0, on sait que la statistique du khi-deux

$$X^2 = 10 \sum_{i=1}^{20} \frac{(\hat{p}_i - \hat{p})^2}{\hat{p}} \quad \sim \quad \chi^2_{19}.$$

Or $\chi^2_{19}(0,05) \simeq 30 < X^2 \simeq 58$, donc rejet $H_0 \Rightarrow$ non homogène!

Justification de l'usage de la crédibilité

Les premières conclusions sont immédiates. La tarification collective n'est pas “équitable”:

- les bons risques paient trop chers leur prime;
- alors que les “mauvais” contrats sont sous-tarifés...

Il y a alors manifestement **deux solutions principales**:

1. segmenter son portefeuille en classe de risque pour gagner en homogénéité;
2. trouver un compromis entre p et p_i pour une tarification individuelle, qui respecte l'expérience des contrats et qui ne soit pas trop variable...

Tarification au client: idée de base

Les modèles de crédibilité permettent de **tarifer plus justement les assurés en fonction de leur historique** de sinistre(s).
Pondération "expérience indiv. / exp. coll." par comb. linéaire:

$$P^{cred} = z\, P^{ind} \;+\; (1 - z)\; P^{coll},$$

avec z $\in [0, 1]$ *facteur de crédibilité*, et $P^{\cdots}$ les $\neq$ primes.

- – on possède d'expérience sur un contrat et + z sera petit,
- + l'expérience individuelle est importante et + z sera grand.

Vocabulaire:

- Lorsque $z = 1$, on parle de **crédibilité totale**;
- si $z < 1$, la crédibilité est **partielle**.

3. Crédibilité américaine et crédibilité européenne
   - Crédibilité américaine
   - Crédibilité partielle

Crédibilité américaine versus européenne

Il existe 2 grandes branches en théorie de la crédibilité, qui sont

- la crédibilité **américaine**, ou crédibilité de stabilité: l'assureur ne tient compte de l'expérience individuelle que si elle est suffisamment stable dans le temps.
- la crédibilité **européenne**: l'assureur tient compte de l'expérience individuelle de manière à obtenir la meilleure estimation possible de l'expérience de sinistralité future. Le poids de l'expérience individuelle augmente avec l'hétérogénéité du portefeuille.

3 Crédibilité américaine et crédibilité européenne

- Crédibilité américaine
- Crédibilité partielle

Crédibilité américaine

On définit une prime pure fiable comme une prime pour laquelle la probabilité est forte qu'elle ne diffère pas de la vraie prime par plus d'une limite arbitraire :

$$\mathbb{P}((1-k)E[S] \leq S \leq (1+k)E[S]) \geq p,$$

avec

- k normalement pris petit,
- p proche de 1,
- S représente l'expérience d'un contrat (montants de sinistre, nombres de sinistre).

Expérience stable et contrat crédible

L'expérience stable sur un contrat permet de définir la notion d'un contrat d'assurance crédible en crédibilité complète.

Pas de notion de portefeuille pour le moment, mais la stabilité de l'expérience est normalement liée à l'un des facteurs suivants

- historique important,
- gros volume de prime,
- grande masse salariale, nombre d'employés important,
- grand nombre de sinistres...

Remarque: en général, la taille du contrat est davantage liée à la fréquence des sinistres qu'à leur taille.

Crédibilité complète

Définition: une crédibilité complète d'ordre (k, p) est attribuée à l'expérience S d'un contrat si les paramètres de la distribution de S permettent de vérifier la relation

$$\mathbb{P}((1-k)E[S] \leq S \leq (1+k)E[S]) \geq p.$$

Exemple: nb d'employés minimal pour considérer l'expérience S (nb d'accidents par année) d'un employeur pleinement crédible. Considérons $S \sim \mathcal{B}(n, \lambda)$, avec n nb d'employés, λ proba d'acc.

On cherche n tel que pour k et p donnés, on ait:

$$\mathbb{P}((1-k)E[S] \leq S \leq (1+k)E[S]) \geq p$$

Par le théorème central limite: $\dfrac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{-kE[S]}{\sqrt{Var[S]}} \leq \frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \leq \frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) &\simeq \Phi\left(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) - \Phi\left(-\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) - 1 \geq p
\end{aligned}$$

On obtient donc $\frac{kE[S]}{\sqrt{Var[S]}} \geq \nu_{\epsilon/2}$ (1), où $\epsilon = 1 - p$ et ν_α est le $100(1-\alpha)^e$ centile d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Avec $E[S] = n\lambda$ et $Var[S] = n\lambda(1-\lambda)$ et en isolant n dans l'inégalité, on obtient

$$n \geq \left(\frac{\nu_{\epsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Exemple d'application numérique

Prenons par exemple:

- $k = 0.05$: on tolère un écart à la moyenne de 5%
- $p = 0.95 \Rightarrow \epsilon/2 = 0.025$: on veut 95% de chance que l'expérience à venir se réalise dans l'intervalle considéré
- $\lambda = 0.1$: il y a 1 chance sur 10 d'avoir un accident dans la période considérée

Il faut donc

$$n \geq \left(\frac{\nu_{0.025}}{0.05}\right)^2 \frac{1-0.1}{0.1} = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 \times 9 = 13829.76 \text{ employés!}$$

Remarques

On peut dériver ce résultat dans bien d'autres cas, comme le cas d'une loi Poisson composée pour un contrat (cf **exemple 2.2**).

D'autre part,

1. en général (cf (1)) le seuil de crédib. complète s'exprime t.q.

$$E[S] \ \geq \ \left(\frac{\nu_{\epsilon/2}}{k}\right)\sqrt{Var[S]}.$$

2. la distribution de S est rarement symétrique. Peut-on alors utiliser le TCL? Oui car le critère de crédib. complète exige que la distrib. soit très concentrée autour de sa moyenne...
3. peu d'applications de la crédibilité américaine concrètement.

3. Crédibilité américaine et crédibilité européenne
    - Crédibilité américaine
    - Crédibilité partielle

Crédibilité partielle

Nouvelle approche justifiée par le besoin de tenir compte de l'exp. indiv. d'un contrat se trouvant sous le seuil de crédibilité complète.

Whitney (1918) propose une prime P pondérée entre l'exp. indiv. S et la prime collective P^{coll} par un facteur de crédibilité $(0 \leq z \leq 1)$:

$$P = z\,S \; + \; (1 - z)\,P^{coll}.$$

Plusieurs formules existent; notons n_0 le seuil de crédib. complète:

- $z = \min\left(\sqrt{\frac{n}{n_0}},\ 1\right)$ ou $z = \min\left(\left(\frac{n}{n_0}\right)^{2/3},\ 1\right)$

- formule de Whitney : $z = \frac{n}{n+K}$, où K constante à dire d'expert pour limiter les fluctuations de la prime entre années.

Quelques remarques:

1. Le but de cette approche est d'incorporer autant d'expérience individuelle que possible sans trop affecter la stabilité de la prime;

2. La distribution des primes est basée uniquement sur la "taille" des assurés, ce qui peut engendrer une tarification pas forcément équitable...

3. Crédibilité complète : crédibilité partielle où $z = 1$.

4 Extension : estimation bayésienne

Estimation bayésienne

Rappel du principe de l'estimation bayésienne (cas continu):

Estimer le paramètre inconnu θ d'une distribution (continue) de densité $f(s;\theta)$ à partir d'un échantillon aléatoire $S_1, S_2, ..., S_T$.

En bayésien, on a une opinion a priori qui consiste à supposer que θ est la réalisation d'une v.a. Θ de densité $u(\theta)$. Au fur et à mesure que les données s'accumulent (avec les années par exemple), l'opinion sur la valeur de θ est révisée et améliorée.
On calcule alors la distribution a posteriori de Θ:

$$u(\theta|s_1, ..., s_T) = \frac{f(s_1, ..., s_T, \theta)}{f(s_1, ..., s_T)} = \frac{f(s_1, ..., s_T|\theta)u(\theta)}{f(s_1, ..., s_T)}$$

Ce qui donne $u(\theta|s_1, ..., s_T) = \dfrac{f(s_1, ..., s_T|\theta)u(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(s_1, ..., s_T|\theta)u(\theta)d\theta}$.

Puis on donne un estimateur $\hat{\theta} = g(S_1, ..., S_T)$ de θ en **minimisant l'espérance a posteriori d'une fonction de perte**, en général

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^2.$$

L'estimateur bayésien minimisant $E[L(\theta, \hat{\theta}) \,|\, S_1, ..., S_T]$ est

$$\hat{\theta} = E[\Theta \,|\, S_1, ..., S_T] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \, u(\theta \,|\, s_1, ..., s_T) \, d\theta.$$

Cela correspond à l'espérance de Θ calculée par rapport à la distribution a posteriori (→ **faire l'exemple 3.1**).

Allure générale des données

On dispose d'un historique de sinistres sur $+$sieurs périodes pour 1 ou $+$ieurs polices (contenant chacune 1 ou $+$sieurs contrats).
Θ représente le profil de risque de l'assuré, **inconnu**.

Police	Variable non observable	Observations				
		1	...	t	...	T
1	Θ_1	S_{11}	...	S_{1t}	...	S_{1T}
...	...	...	...	...	...	...
i	Θ_i	S_{i1}	...	S_{it}	...	S_{iT}
...	...	...	...	...	...	...
I	Θ_I	S_{I1}	...	S_{It}	...	S_{IT}

S_{it} représente un **montant de sinistres** (agrégés) au cours d'une période (ex: année).

Formalisme mathématique

Soit un portefeuille hétérogène de I contrats, observé sur une période T. On désire tarifer les contrats pour la période $T+1$.

Notation: Θ_i est le profil de risque de l'assuré; $\Theta_1, ..., \Theta_I \sim \Theta$.

Le niveau de risque Θ_i du contrat i est inconnu, le contrat produit des montants de sinistres notés S_{it} pour la t^e période. Individuellement, on a donc l'expérience $S = (S_{it})_{t=1,...,T}$.

Une hypothèse sur Θ_i est nécessaire: constance dans le temps!

(dans l'ex. 3.1, Θ a 2 valeurs possibles : $\Theta = 1/15$ ou $1/10$)

On a l'info contenue ds l'ensemble du portefeuille sur la structure collective du risque: notons $U(\theta)$ sa FdR, et $u(\theta)$ sa densité.

C'est la **fonction de structure du portefeuille**. Ds l'exemple 3.1:

$$\mathbb{P}(\Theta=\theta)=\begin{cases}3/4 \text{ si } \theta=1/15,\\ 1/4 \text{ si } \theta=1/10.\end{cases} \quad \text{et} \quad U(\theta)=\begin{cases}0 \quad \text{si } \theta<1/15,\\ 3/4 \text{ si } 1/15\leq\theta<1/10,\\ 1 \quad \text{si } \theta\geq 1/10.\end{cases}$$

Pour déterminer la prime pure, faire des hyp. supplémentaires:

1. les obs. $(S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{iT})$ sont conditionnellement i.i.d., de fonction de répartition $F(s|\theta_i)$.
2. $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_I$ sont i.i.d. de fonction de répartition $U(\theta)$.
3. les contrats sont indépendants.

Modèle d'urne en 2 étapes: 1) tirage Θ_i, 2) sinistres $\sim F(s|\theta_i)$.

Par définition la prime de risque individuelle $P^{ind}(\theta_i)$ de l'assuré i pour couvrir l'éventuel sinistre $S_{i(T+1)}$ en période $T+1$ satisfait

$$P^{ind}(\theta_i) = \mathbb{E}[S_{it} \,|\, \Theta = \theta_i] = \int_0^{\infty} s\, f(s|\theta_i)\, ds.$$

Bien sûr on ne connait pas θ_i, donc on ne connait pas $\mu(\theta_i)$. Il en faut des estimateurs. Ainsi, on se sert de la prime collective P^{coll}:

$$P^{coll} = \mathbb{E}_{\Theta}[P^{ind}(\Theta)] = \mathbb{E}_{\Theta}[\mathbb{E}[S_{it} \,|\, \Theta]] = \int_{\Theta} P^{ind}(\theta)\, dU(\theta).$$

$\rightarrow$ Remarques:

- prime collective: montant certain, égal pr tous les contrats;
- la prime individuelle reste aléatoire puisqu'elle dépend de Θ_i.

L'objectif est de tarifier le plus justement possible chaque contrat, en tenant compte de son historique de sinistre.
Ce raisonnement nous amène à définir la prime de Bayes P^B:

$$P^B = \mathbb{E}_\Theta[P^{ind}(\Theta_i) \,|\, S_i] = \int_{-\infty}^{\infty} P^{ind}(\theta)\, u(\theta \,|\, S_i)\, d\theta.$$

où $S_i = (S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{iT})$.

La prime de Bayes est un montant certain.

Théorème: au regard du critère de l'EQM, la prime de Bayes est le meilleur estimateur de la prime de risque individuelle (cf slide 40).

Quelques remarques

- La prime de Bayes est la meilleure prévision de $S_{i(T+1)}$.
- Comme la prime collective, c'est une moyenne pondérée des primes de risque, mais utilisant la distribution a posteriori de Θ plutôt que celle a priori:

$$P^{coll} = \int_{\Theta} P^{ind}(\theta)u(\theta)\, d\theta \quad \text{VS} \quad P^{B} = \int_{-\infty}^{\infty} P^{ind}(\theta)u(\theta|S_i)\, d\theta$$

- On peut interpréter la prime coll. comme la prime bayésienne de 1ere année, lorsque nous n'avons pas d'expérience.
- L'ordre des sinistres n'est pas pris en compte dans les calculs car $f(s_1, ..., s_T|\theta_i) = \prod_{t=1}^{T} f(s_t|\theta_i)$ $\rightarrow$ slide 40 expression $u()$.

Exemples de prime bayésienne

Exemple 3.2

Exemple 3.3

Exemple 3.4

Crédibilité bayésienne linéaire

Dans l'ex. 3.3, la prime bayésienne peut s'écrire différemment:

$$
\begin{aligned}
P^B &= \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} S_t}{\alpha + \beta + T} = \frac{T}{T+\alpha+\beta}\bar{S} \; + \; \frac{\alpha+\beta}{T+\alpha+\beta}\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
&= z\,\bar{S} \; + \; (1-z)\,P^{coll} \qquad \rightarrow \text{linéaire en les obs. } S
\end{aligned}
$$

avec $z = T/(T+\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \quad z \in [0,1]$.

Remarque: une prime de la forme $P_{T+1} = z\bar{S} + (1-z)P^{coll}$ est appelée **prime de crédibilité**.

Primes bayésiennes s'exprimant sous forme linéaire

Certaines combinaisons de distributions $F(x|\theta)$ et $U(\theta)$ conduisent la prime bayésienne à s'apparenter à une prime de crédibilité:

- mélange Poisson-Gamma :

$$X_t|\Theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta) \qquad \text{et} \qquad \Theta \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$$

- mélange Exponentielle-Gamma :

$$X_t|\Theta = \theta \sim \mathcal{E}(\theta) \qquad \text{et} \qquad \Theta \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$$

- mélanges Normale-Normale, mélange Bernoulli-Beta, mélange Géométrique-Beta.

Exemple Poisson-Gamma

On a donc $f(s|\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^s}{s!}$ et $u(\theta) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{\lambda\theta}$, $\theta > 0$.

1) Calcul de la prime de risque:

$$P^{ind}(\theta) = E[S_t \,|\, \Theta = \theta] = \theta \qquad (\sigma^2(\theta) = Var[X_t|\Theta = \theta] = \theta)$$

2) Calcul de la prime collective :

$$P^{coll} = E_\Theta[P^{ind}(\Theta)] = E_\Theta[\Theta] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

2) Calcul de la prime bayésienne : on a déjà vu que

$$u(\theta \,|\, s_1, ..., s_T) \sim u(\theta) \prod_{t=1}^{T} f(s_t \,|\, \theta)$$

D'où $\quad u(\theta \,|\, s_1, ..., s_T) = \theta^{\alpha + \sum_{t=1}^{T} s_t - 1} e^{-(\lambda + T)\theta}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P^B &= E[P^{ind}(\Theta) \,|\, S_1, ..., S_T] = E[\Theta \,|\, S_1, ..., S_T] = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}} \\ &= \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} S_t}{\lambda + T} \\ &= \frac{T}{T+\lambda} \bar{S} \; + \; \frac{\lambda}{T+\lambda} \frac{\alpha}{\lambda} \\ &= z\,\bar{S} + (1-z)\,P^{coll} \end{aligned}$$

La prime bayésienne est ici **linéaire en les observations**, on parle de prime de crédibilité exacte.

5. La crédibilité bayésienne
    - Formalisme mathématique
    - Crédibilité exacte ou crédibilité bayésienne linéaire
    - Approche Bonus / Malus

Principe de l'approche Bonus / Malus

Historiquement, la construction d'une échelle Bonus-Malus passe par la détermination de la prime de Bayes.

On ajuste la prime du conducteur en fonction du sinistre espéré par un coefficient appliqué à la prime collective:

$$\text{coefficient bonus malus} \quad \sim \quad \frac{P^B}{P^{coll}} \times 100$$

Cette formule est plutôt appliquée à la *fréquence* des sinistres en pratique, car **Bichsel** montre que le profil de risque d'un assuré est mieux expliqué par son nb de sinistres que ses montants.

Remarques sur cette expression

Le coefficient Bonus / Malus est un coefficient de proportionnalité qui s'applique à la prime de l'assuré.

- Si l'expérience individuelle est fortement sinistrée:

$$P^B > P^{coll} \Rightarrow coef > 100\%$$

- Si l'expérience indiv. montre que l'assuré est un “bon” risque:

$$P^B < P^{coll} \Rightarrow coef < 100\%$$

- Si l'expérience indiv. correspond exactement à la collectivité:

  Aucun coefficient n'est appliqué!

En pratique, on introduit aussi un plancher/plafond pour ce coef.

Exemple de tarification a posteriori

Il suffit donc de modéliser la fréquence des sinistres pour aboutir au coefficient Bonus-Malus.

Hyp. classique: fréquence sinistres $N \sim$ Poisson-Gamma.

On a vu que $\hat{F}^B = z\,\bar{N} \;+\; (1-z)\,F^{coll}$.
On définit les paramètres de structure comme les quantités:

$$\begin{aligned} F^{ind} &= E[N\,|\,\Theta] = \Theta \\ F^{coll} &= E_\Theta[E[N\,|\,\Theta]] = E_\Theta[\Theta] = \alpha/\lambda \\ z &= T/(T+\lambda) \end{aligned}$$

Le coefficient Bonus / Malus vaudra donc $\dfrac{\lambda\,z\,\bar{N} \;+\; (1-z)\,\alpha}{\alpha}$.

Quelques commentaires

→ Moyenne pondérée de l'expérience collective et individuelle.

→ Le facteur de crédibilité $T/(T+\lambda)$ est

- **décroissant avec** λ: plus le collectif est homogène, plus on accorde de crédit à la prime collective,
- **croissant avec le nombre T d'années d'observation**: $+$ on a d'information sur l'individu et $+$ sa crédibilité tendra vers 1.

Comme on sait calculer F^B et F^{coll}, on sait calculer le coefficient bonus-malus! (dans ce cas d'application en tout cas)

Estimation des paramètres de structure

L'estimation des paramètres de structure se fait par la méthode des moments:

1. nous calculons les moyenne et variance empiriques de N,
2. on connait l'expression théo. de ces quantités:

$$
\begin{aligned}
E[N] &= \alpha/\lambda \\
Var[N] &= E[Var[N|\Theta]] + Var[E[N|\Theta]] = E[\Theta] + Var[\Theta] \\
&= \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

3. système de 2 éq. à 2 inconnues: déduit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\lambda}$ en inversant ces équations et en remplaçant $E[N]$ et $Var[N]$ par $\hat{\mu}_N$ et $\hat{\sigma}_N^2$!

6 Prime de crédibilité

- Introduction
- Modèle de Buhlmann
- Modèle de Buhlmann-Straub
- Prise en compte de tendance
- Implémentation en R

Rappel sur les données à disposition

On dispose d'un historique de sinistres sur $+$sieurs périodes pour 1 ou $+$ieurs polices (contenant chacune 1 ou $+$sieurs contrats).
Θ représente le profil de risque de l'assuré, **inconnu**.

Police	Variable non observable	Observations				
		1	...	t	...	T
1	Θ_1	S_{11}	...	S_{1t}	...	S_{1T}
...	...	...	...	...	...	...
i	Θ_i	S_{i1}	...	S_{it}	...	S_{iT}
...	...	...	...	...	...	...
I	Θ_I	S_{I1}	...	S_{It}	...	S_{IT}

S_{it} représente un **montant de sinistres** (agrégés) au cours d'une période (ex: année).

La prime de crédibilité

Certaines complications inhérentes à la théorie sous-jacente à la détermination de la prime de Bayes telles que

- nécessité de **supposer une loi a-priori** $+$ **loi conditionnelle**,
- **difficulté de l'avoir ss forme explicite** en général,

jouent en faveur de l'estimation d'une autre prime (bien que la prime de Bayes soit le meilleur estimateur de la prime individuelle).

C'est dans ce contexte qu'est introduite la prime de crédibilité, où l'on se restreint à la classe des estimateurs linéaires en les obs.:

$$P_i^{cred} \quad = \quad \beta + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t S_{it}.$$

$\hat{\beta}, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_t$ sont solutions du problème d'optimisation (MCO):

$$\min_{\alpha,\beta} \mathbb{E}\left[\left(P^{ind}(\Theta_i) - \beta - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t S_{it}\right)^2\right],$$

où $P^{ind}(\Theta_i)$ est la prime de risque individuelle que nous cherchons à approcher un maximum dans cette classe d'estimateurs.

Comme la distribution de S_i est invariante par permutation des S_{it}, alors $\hat{\alpha}_1 = ... = \hat{\alpha}_t$, et donc l'estimateur de crédibilité pour l'assuré i est de la **forme simplifiée**

$$\hat{P}_i^{cred} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}\ \bar{S}_i \qquad \text{(avec } \bar{S}_i = \sum_{t=1}^{T} S_{it}\text{)}$$

solution de

$$\min_{\alpha,\beta} \mathbb{E}\left[(P^{ind}(\Theta_i) - \beta - \alpha \bar{S}_i)^2\right].$$

Conséquences: la résolution de ce système donne

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{Cov(\bar{S}_i, P^{ind}(\Theta_i))}{Var(\bar{S}_i)}\\ \hat{\beta} &= \mathbb{E}_{\Theta}[P^{ind}(\Theta_i)] - \hat{\alpha}\ \bar{S}_i = P^{coll} - \hat{\alpha}\ \bar{S}_i.\end{aligned}$$

On note respectivement s^2 et a des quantités liées aux variances intra-contrat et inter-contrat:

$$\begin{aligned}s^2 &= E[Var[S_{it}|\Theta_i]] = E[\sigma^2(\Theta_i)]\\ a &= Var[E[S_{it}|\Theta_i]] = Var[P^{ind}(\Theta_i)].\end{aligned}$$

L'objectif est de faire le lien entre les coeff. de régression théo. et ces quantités concrètes qui ont une interprétation.

Si $S_1, ..., S_T$ sont conditionnellement $\perp\!\!\!\perp$ sachant Θ, en notant

$$\begin{aligned} E[S_t|\Theta] &= P^{ind}(\Theta), \\ Var[S_t|\Theta] &= \sigma^2(\Theta), \end{aligned}$$

on peut montrer que $Cov[S_t, S_u] = a\mathbb{1}_{t\neq u} + (a+s^2)\mathbb{1}_{t=u}$, et

$$Cov[S_t, P^{ind}(\Theta)] = a.$$

Ceci nous permet d'incorporer les quantités a et s^2 (estimables empiriquement) dans $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ pour estimer ces coef. de régression.

On obtient $\begin{array}{l} \hat{\alpha} = a/(aT+s^2) \\ \hat{\beta} = (1 - T\hat{\alpha})\, P^{coll} \end{array}$ injecté dans $\hat{P}_i^{cred} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}\ \bar{S}_i$.

Modèle de Buhlmann

Sous les hypothèses:

1. (H1) Hypothèse liée aux profils de risque:
   - (H1a) les contrats $(\Theta_i, S_i)_{i=1,...,I}$ sont $\perp\!\!\!\perp$;
   - (H1a) les v.a. Θ_i sont i.d. (de distribution $U(\theta)$);
2. (H2) : les v.a. S_{it} sont telles que

$$\begin{aligned} E[S_{it}\,|\,\Theta_i] &= P^{ind}(\Theta_i) \qquad i = 1,...,I \\ Cov[S_{it}, S_{iu}\,|\,\Theta_i] &= \sigma^2(\Theta_i)\,\mathbb{1}_{t=u} \qquad t,u = 1,...,T \end{aligned}$$

Alors l'estimateur de crédibilité s'écrit

$$\hat{P}_i^{cred} = z\,\bar{S} + (1-z)\,\hat{P}^{coll} \qquad \text{avec} \quad z = \frac{T}{T + \frac{s^2}{a}}.$$

Observations sur la prime de crédibilité

Cette prime satisfait un ensemble de considérations intuitives que tout bon praticien aurait. A savoir:

- **combinaison linéaire convexe** de la prime individuelle et de la prime collective: elle se trouve entre ces 2 primes;
- le **facteur de crédibilité croit avec le nb d'années d'obs.**;
- ce facteur
  - **décroit avec la variabilité interne du risque**,
  - **croit avec l'hétérogénéité du portefeuille**;
- on peut estimer empiriquement les paramètres de structure, ou bien les fixer à dire d'expert.

Estimateurs non-paramétriques des variances

Les données de sinistralité nous permettent d'estimer empiriquement les paramètres essentiels jouant dans la prime :

- la variance intra-contrat:

$$s^2 = E[Var[S_{it}|\Theta_i]] \quad \rightarrow \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{I(T-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} (S_{it} - \bar{S}_i)^2$$

- la variance inter-contrats:

$$a = Var[E[S_{it}|\Theta_i]] \quad \rightarrow \quad \hat{a} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{S}_i - \bar{S})^2 - \frac{\hat{s}^2}{T}$$

Remarque: ces estimateurs sont sans biais et convergents.

6 Prime de crédibilité

- Introduction
- Modèle de Buhlmann
- Modèle de Buhlmann-Straub
- Prise en compte de tendance
- Implémentation en R

Modèle de Buhlmann-Straub

- C'est le modèle le plus utilisé en théorie de la crédibilité.
- Une **généralisation** du modèle de Buhlmann qui tient compte de l'exposition au risque des contrats.

Ce dernier point est particulièrement important dans la configuration où la taille des contrats varient beaucoup.

Exemple: un assureur assure plusieurs entreprises en accidents de travail. Ces entreprises ont un nombre de salariés très différent.

Allure générale des données

On tient compte de l'exposition des contrats via l'introduction de poids ω dans les données.

Police	Var. non obs.	Observations					Poids				
		1	...	t	...	T	1	...	t	...	T
1	Θ_1	X_{11}	...	X_{1t}	...	X_{1T}	ω_{11}	...	ω_{1t}	...	ω_{1T}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	Θ_i	X_{i1}	...	X_{it}	...	X_{iT}	ω_{i1}	...	ω_{it}	...	ω_{iT}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
I	Θ_I	X_{I1}	...	X_{It}	...	X_{IT}	ω_{I1}	...	ω_{It}	...	ω_{IT}

Intuitivement, on s'attend à ce que **l'expérience d'un gros contrat soit plus stable** dans le temps.

Quelles évolutions dans le modèle de Buhlmann?

Pour intégrer ceci, on relâche l'hypothèse sous-jacente au modèle de Buhlmann: variances conditionnelles identiques entre contrats.
$\rightarrow$ $Var(X_{ij} \,|\, \Theta_i)$ devrait **décroitre avec l'exposition du contrat** i.

Les hypothèses du modèle de Buhlmann-Straub sont donc

1. (H1) Hypothèse liée aux profils de risque:
   - (H1a) les contrats $(\Theta_i, S_i)_{i=1,...,I}$ sont $\perp\!\!\!\perp$;
   - (H1a) les v.a. Θ_i sont i.d. (de distribution $U(\theta)$);
2. (H2) : les v.a. X_{it} ont une variance finie;
3. (H3) : les v.a. X_{it} sont telles que

$$\begin{aligned} E[X_{it} \,|\, \Theta_i] &= P^{ind}(\Theta_i) \qquad i = 1, ..., I \\ Cov[X_{it}, X_{iu} \,|\, \Theta_i] &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{it}} \mathbb{1}_{t=u} \qquad t, u = 1, ..., T \end{aligned}$$

On a donc que

$$Var[X_{it}\,|\,\Theta_i] \quad = \quad \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{it}}.$$

Or, pour que cette relation soit vraie, il faut que X_{it} soit un ratio. Sa définition la plus courante est

$$X_{it} = \frac{S_{it}}{\omega_{it}}$$

avec par exemple

- S_{it} est le montant total des sinistres, et ω_{it} est la prime totale payée. C'est en fait un **loss ratio**,
- S_{it} est le montant total des sinistres, et ω_{it} la masse salariale,
- S_{it} est le nb d'accidents dans une flotte de voitures, et ω_{it} est le nb de véhicules.

Notations

On note dans la suite

- $\omega_{i\bullet} = \sum_{t=1}^{T} \omega_{it}$
- $\omega_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{I} \omega_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} \omega_{it}$
- $z_{\bullet} = \sum_{i=1}^{I} z_i$
- $X_{i\omega} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_{it}}{\omega_{i\bullet}} X_{it}$
- $X_{\omega\omega} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} X_{i\omega} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_{it}}{\omega_{\bullet\bullet}} X_{it}$
- $X_{z\omega} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_{\bullet}} X_{i\omega}$

Résultats intermédiaires nécessaires

Sous les 2 hypothèses formulées dans le modèle de Buhlmann-Straub sur les v.a. $(X_{it})_{i=1,\dots,I;t=1,\dots,T}$, on a

- $Cov[X_{it}, X_{ku}] = \mathbb{1}_{i=k}\left(a + \frac{s^2}{\omega_{it}}\,\mathbb{1}_{t=u}\right)$
- $Cov[P^{ind}(\Theta_i), X_{ku}] = a\,\mathbb{1}_{i=k}$
- $Cov[X_{it}, X_{k\omega}] = \mathbb{1}_{i=k}\left(a + \frac{s^2}{\omega_{i\bullet}}\right)$

Ces résultats nous servent à retrouver l'expression de la prime, en dérivant l'équation du problème d'optimisation.

Prime de crédibilité dans le modèle de BS

La meilleure approximation linéaire de la prime de risque d'un contrat dans le modèle de Buhlmann-Straub est donnée par

$$P_i^{cred} \quad = \quad z_i \, X_{i\omega} \; + \; (1 - z_i) \, P^{coll}$$

avec $z_i = \dfrac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet} + \frac{s^2}{a}}$.

Remarques:

- Les facteurs de crédibilité sont **individualisés**.
- L'interprétation du sens d'impact des paramètres n'a pas changé.

Estimateurs des paramètres de structure dans BS

- Estimateur linéaire à variance minimale de la prime collective:

$$\hat{P}^{coll} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\hat{z}_i}{\hat{z}_\bullet} X_{i\omega}$$

- Variance intra-contrat:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{I(T-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} \omega_{it} (X_{it} - X_{i\omega})^2$$

- Variance inter-contrats:

$$\hat{a} = \frac{\omega_{\bullet\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}^2 - \sum_i \omega_{i\bullet}^2} \left(\sum_{i=1}^{I} \omega_{i\bullet} (X_{i\omega} - X_{\omega\omega})^2 - (I-1)\hat{s}^2 \right)$$

Résumé des étapes à exécuter pour appliquer BS

1. Calculer $\omega_{i\bullet}$ pour $I = 1, ..., I$; et $\omega_{\bullet\bullet}$.
2. Calculer $X_{i\omega}$ pour $I = 1, ..., I$; et $X_{\omega\omega}$
3. Estimer $\hat{s}^2$;
4. Estimer $\hat{a}$;
   - si $\hat{a} > 0$: calculer $\tilde{a}$ et poser $\hat{a} = \tilde{a}$; calculer

   $$\hat{z}_i = \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet} + \hat{s}^2/\hat{a}} \qquad \hat{P}^{coll} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\hat{z}_i}{\hat{z}_\bullet} X_{i\omega}$$

   - si $\hat{a} < 0$: poser $\hat{a} = 0, \hat{z}_i = 0$ pour tout i et $\hat{P}^{coll} = X_{\omega\omega}$
5. Déduire les primes de crédibilité individuelles pour tout i par

$$\hat{P}_i^{cred} = \hat{z}_i X_{i\omega} + (1 - \hat{z}_i) \hat{P}^{coll}.$$

Le modèle de Hachemeister: une régression temporelle

Parfois, il peut arriver que la prime de crédibilité ne se situe pas entre la prime individuelle et la prime collective. Mathématiquement, ce résultat pose un problème puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire convexe de ces deux primes!

On a alors recours au modèle dit de **Hachemeister**:

- ce modèle permet **d'intégrer une tendance** dans l'expérience vécue par l'assureur;
- il permet de **rendre robuste des prévisions dans le temps** lorsque les données sont biaisées par un facteur temporel...

Ce modèle, moins connu, prend en compte les mm info. que Buhlmann-Straub tout en intégrant une tendance potentielle.

Implémentation des différents modèles de crédibilité

L'ensemble des modèles de crédibilité sont implémentés dans le package **actuar** de `R`. Il s'agit notamment des modèles:

- Buhlmann: + ancien, aucun poids aux données;
- Buhlmann-Straub: données pondérées, inadapté au données présentant une tendance;
- Modèle hiérarchique: structure hiérarchique de prime;
- Modèle de régression (Hachemeister): tendance.

Le logiciel calcule les paramètres de structure: prime collective, prime individuelle, variance intra et inter-contrats.

http://cran.r-project.org/web/packages/actuar/index.html

Théorie de la crédibilité: mise en oeuvre en R

La mise en oeuvre des modèles de crédibilité est particulièrement facilitée par la librairie **actuar** développée par V. Goulet.

```
> data(hachemeister)

     state ratio.1 ratio.2 ratio.3 ratio.4 ratio.5 ratio.6 ratio.7 ratio.8 ratio
     weight.3 weight.4 weight.5 weight.6 weight.7 weight.8 weight.9 weight.10
[1,]     1    1738    1642    1794    2051    2079    2234    2032    2035    21
[2,]     2    1364    1408    1597    1444    1342    1675    1470    1448    14
[3,]     3    1759    1685    1479    1763    1674    2103    1502    1622    18
[4,]     4    1223    1146    1010    1257    1426    1532    1953    1123    13
[5,]     5    1456    1499    1609    1741    1482    1572    1606    1735    16
```

Ce jeu de données répertorie tous les trimestres entre Juillet 1970 et Juin 1973 pour 5 états américains:

- montant moyen de sinistres (**ratios**): blessures par accident,
- **exposition**: le nombre de sinistres.

Calibration du modèle de Buhlmann-Straub

La fonction **cm()** permet de calibrer des modèles de crédibilité.
Suivant ses arguments, plusieurs modèle peuvent être définis:

- Buhlmann, Buhlmann-Straub (que nous calibrons ci-dessous),
- Hachemeister, hiérarchique.

```
>  (cred.model <- cm(~state, data=hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12, weights

Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12,
    weights = weight.1:weight.12)

Structure Parameters Estimators
  Collective premium: 1683.713

  Between state variance: 89638.73
  Within state variance: 139120026
```

Projection des primes: calcul de la crédibilité

Calcule des primes de crédibilité pour l'année suivante: **predict()**:

```
>  predict(cred.model)
[1] 2055.165 1523.706 1793.444 1442.967 1603.285
```

Accès au résumé des résultats via : **summary()**:

```
Structure Parameters Estimators
  Collective premium: 1683.713
  Between state variance: 89638.73
  Within state variance: 139120026

Detailed premiums
    state Indiv. mean Weight Cred. factor Cred. premium
    1     2060.921    100155 0.9847404    2055.165
    2     1511.224     19895 0.9276352    1523.706
    3     1805.843     13735 0.8984754    1793.444
    4     1352.976      4152 0.7279092    1442.967
    5     1599.829     36110 0.9587911    1603.285
```