
Calculating Greeks by Monte Carlo simulation

Filière mathématiques financières

Projet de spécialité

Basile Voisin, Xavier Milhaud
Encadré par Mme Ying Jiao
ENSIMAG - Mai-Juin 2007

Table des matières

1	Remerciements	2
2	Introduction	2
3	Simulation du mouvement brownien géométrique	2
3.1	Théorie	2
3.2	Graphe	2
4	Le cas d'une option européenne	3
4.1	Généralités	3
4.2	La méthode <i>pathwise</i>	3
4.2.1	Description de la méthode	3
4.2.2	Estimateurs	3
4.3	La méthode des ratio de vraisemblance : <i>likelihood ratio method</i>	4
4.3.1	Description de la méthode	4
4.3.2	Estimateurs	4
4.4	Simulation et graphes	4
4.5	Comparaison de ces deux méthodes : vitesse de convergence	7
5	Les options asiatiques : options "path-dépendantes"	10
5.1	Généralités	10
5.2	Estimation par la méthode <i>pathwise</i>	10
5.2.1	Expression des estimateurs	10
5.2.2	Quelques calculs d'estimateur	11
5.3	Estimation par la méthode <i>likelihood ratio</i>	11
5.3.1	Expression des estimateurs	11
5.4	Simulation et graphes	12
5.5	Convergence	15
6	Observations sur les sensibilités suivant le type d'option	17
7	Réduction de la variance pour le calcul des grecques	17
7.1	Principe	17
7.2	Résultats numériques	18
8	Le calcul Malliavin appliqué à une option asiatique	21
8.1	Principe	21
8.2	Quelques calculs de grecques sur une option asiatique avec rendement et volatilité constants	21
8.2.1	Idée du calcul	21
8.2.2	Le delta	21
8.2.3	Le gamma	22
8.3	Simulation	22
8.4	Bilan sur cette méthode	24
9	Conclusion générale	24
10	Bibliographie	24

1 Remerciements

Nous remercions Ying Jiao pour avoir encadré notre projet et nous avoir apporté de l'aide afin que nous comprenions mieux le sujet.

2 Introduction

Très utilisés dans la gestion de risque pour mesurer l'influence des différents paramètres sur le prix d'une option, les grecques sont d'une grande importance en finance.

Cependant, leur calcul n'est souvent pas évident et nous disposons rarement de formules fermées pour cela. La simulation devient alors d'une grande utilité car elle permet d'obtenir de bonnes approximations de ces grecques. Dans ce projet nous nous attachons à l'étude et à la compréhension de différentes méthodes de simulation ainsi qu'à leur mise en oeuvre sur plusieurs types d'option. Les méthodes étudiées sont dites directes.

3 Simulation du mouvement brownien géométrique

3.1 Théorie

Nous avons modélisé le cours d'une action par un mouvement brownien géométrique simulé grâce à la propriété d'accroissements indépendants. En effet, comme le mouvement brownien W_t suit une loi normale $N(0, t)$, il est possible de le simuler grâce à des gaussiennes sur de petits accroissements cumulés pour obtenir la simulation sur l'intervalle entier.

Nous avons plus précisément simulé la variation sur chaque intervalle que nous avons ajouté à la valeur précédente du brownien comme l'explique J.Hull dans son ouvrage *Options, futures et autres actifs dérivés* :

$$\begin{aligned}dS &= mhS_{cour} + s\sqrt{h}S_{cour}\epsilon \\ S_{cour} &= S_{cour} + dS\end{aligned}$$

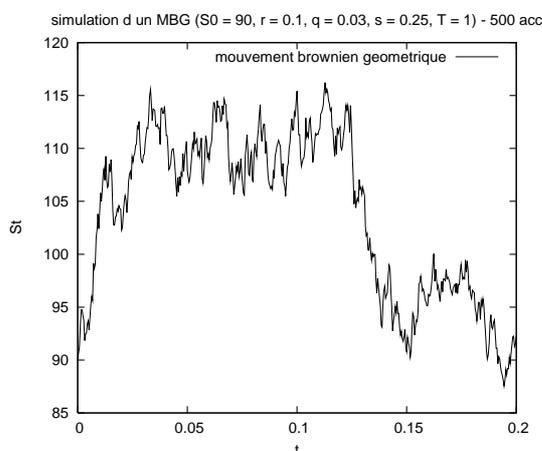
où ϵ suit une loi normale $N(0,1)$;

3.2 Graphe

Pour certains de nos calculs (concernant le Call européen), nous aurions pu nous contenter de simuler un seul accroissement du brownien pour avoir directement la valeur finale S_T . Nous avons cependant remarqué que cette simulation ne donnait pas de bons résultats par rapport à une simulation avec beaucoup d'accroissements du brownien.

Cela est probablement dû à la part d'aléatoire moins importante dans le premier cas que dans le second : en effet, par construction de notre brownien, l'aléatoire augmente quand le nombre d'accroissements augmente.

Voici donc le graphe du mouvement brownien simulé :



4 Le cas d'une option européenne

4.1 Généralités

La caractéristique essentielle d'une option européenne est qu'on peut l'exercer ou non uniquement à la date d'échéance T . Le cours relevé en T est donc le cours qui va servir pour le calcul du payoff de l'option : celui-ci dépend donc uniquement de ce cours final.

Le cours du sous-jacent d'une option européenne sous la probabilité risque-neutre satisfait l'équation différentielle stochastique $dS_t = S_t[(r - q)dt + \sigma dW_t]$ où W_t est un mouvement brownien standard.

Le prix de l'option est donné par la formule fermée de Black-Scholes et vaut

$$p = E[e^{-rT} \max(S_T - K, 0)]$$

Ainsi, le payoff actualisé d'une option européenne est $P = e^{-rT} \max(S_T - K, 0)$.

4.2 La méthode *pathwise*

4.2.1 Description de la méthode

La méthode *pathwise* est une méthode qui permet d'améliorer le temps de calcul par rapport à une méthode dite indirecte car elle n'exige pas de resimulation.

Le problème consiste à déterminer la variation du prix de l'option en fonction de divers paramètres (volatilité, taux d'intérêt...).

Connaissant l'écriture de S_T ($S_T = S_0 e^{(r-q-0.5\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}$, où Z suit une loi normale centrée réduite), l'idée est de décomposer la dérivée du payoff (si le paramètre est σ) $\frac{dP}{d\sigma}$ en deux dérivées $\frac{dP}{dS_T} \times \frac{dS_T}{d\sigma}$ et d'en déterminer un bon estimateur.

L'échange entre l'intégrale et la dérivée se justifie si la dérivée de la fonction que nous intégrons est définie et continue.

4.2.2 Estimateurs

La dérivée $\frac{dP}{dS_T}$ vaut toujours $e^{-rT} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}$.

Reste donc à calculer l'autre fraction dans chacun des cas (pour chaque grecque). Les estimateurs sans biais sont les suivants :

- **Delta** $\left(\frac{dp}{dS_0}\right) : \frac{dS_T}{dS_0} = \frac{S_T}{S_0}$, d'où l'estimateur $e^{-rT} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \frac{S_T}{S_0}$
- **Gamma** $\left(\frac{d^2p}{dS_0^2}\right) : \text{l'estimateur est } e^{-qT} \frac{n(d_1(K))}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$ (nous retrouvons la formule déterministe de Black-Scholes)
- **Rho** $\left(\frac{dp}{dr}\right) : \text{l'estimateur est } KT e^{-rT} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}$
- **Vega** $\left(\frac{dp}{d\sigma}\right) : \frac{dS_T}{d\sigma} = \frac{S_T}{\sigma} [\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - q + 0.5\sigma^2)T]$
d'où l'estimateur : $e^{-rT} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \frac{S_T}{\sigma} [\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - q + 0.5\sigma^2)T]$
- **Theta** $\left(-\frac{dp}{dT}\right) : \text{l'estimateur est } : re^{-rT} \max(S_T - K) - \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} e^{-rT} \frac{S_T}{2T} (\ln(\frac{S_T}{S_0}) + (r - q - 0.5\sigma^2)T)$

4.3 La méthode des ratio de vraisemblance : *likelihood ratio method*

4.3.1 Description de la méthode

Cette méthode est basée sur l'inversion de la dérivée et de l'espérance, justifiée par la convergence de cette dérivée. Une telle inversion permet de faire apparaître dans l'espérance un ratio de vraisemblance, plus facile à simuler, et qui permet ainsi d'estimer sans biais les grecques.

4.3.2 Estimateurs

Les estimateurs sont les suivants :

- **Delta** $\left(\frac{dp}{dS_o}\right)$: l'estimateur est $e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \frac{1}{S_o \sigma^2 T} \left(\ln\left(\frac{S_T}{S_o}\right) + (r - q - 0.5\sigma^2)T \right)$
- **Gamma** $\left(\frac{d^2p}{dS_o^2}\right)$: l'estimateur est $e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \frac{d^2 - d\sigma\sqrt{T} - 1}{S_o^2 \sigma^2 T}$
- **Rho** $\left(\frac{dp}{dr}\right)$: l'estimateur est $e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \left(-T + \frac{d\sqrt{T}}{\sigma}\right)$
- **Vega** $\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)$: l'estimateur est $e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \left(-d \frac{\delta d}{\delta \sigma} - \frac{1}{\sigma}\right)$
- **Theta** $\left(-\frac{dp}{dT}\right)$: l'estimateur est $e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \left(r + d \frac{\delta d}{\delta T} + \frac{1}{2T}\right)$

4.4 Simulation et graphes

Voici quelques résultats de nos simulations résumés dans un tableau. Il s'agit de simulations d'option d'achat européenne sur action versant des dividendes.

Les valeurs par défaut pour les paramètres qui ne varient pas selon l'étude de tel ou tel grecque sont les suivantes : $S_0 = 100, r = 0.1, q = 0.03, s = 0.25, K = 100, T = 0.2$ avec q le taux des dividendes.

Le nombre de simulations pour le calcul des valeurs en un point est de 100 000.

Prix du Call	$K = 90$	$K = 100$	$K = 110$
Exact (BS)	11.9488	5.1259	1.57735
simulation	11.9475	5.13848	1.5628
delta	$S_o = 90$	$S_o = 100$	$S_o = 110$
Exact (BS)	0.221918	0.768443	0.844258
Pathwise method	0.221816	0.769395	0.844517
LR method	0.21987	0.764123	0.844017
gamma	$S_o = 90$	$S_o = 100$	$S_o = 110$
Exact (BS)	0.0294964	0.034892	0.0189004
Pathwise method	0.0294964	0.034892	0.0189004
LR method	0.0292757	0.0347818	0.0184135
vega	volatilité $\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.3$
Exact (BS)	16.7645	17.379	17.4758
Pathwise method	16.8126	17.3208	17.5087
LR method	16.382	17.6247	17.1188
rho	rendement $r = 10\%$	20%	30%
Exact (BS)	10.3437	11.4913	12.5319
Pathwise method	10.3879	11.5204	12.5449
LR method	10.112	11.5135	12.4031
theta	temps $T = 0.1$ (an)	0.2	0.3
Exact (BS)	-19.0898	-14.3703	-12.2367
Pathwise method	-19.1811	-14.4234	-12.2163
LR method	-18.8022	-14.5356	-12.4169

Dans l'ensemble nous remarquons que les valeurs des estimateurs sont très proches des valeurs données par les formules de Black-Scholes, les résultats sont donc très bons.

Au niveau graphique, comparons les courbes obtenues dans chacun des cas (fig. 1 à 6) et notons que les courbes sont quasiment superposées.

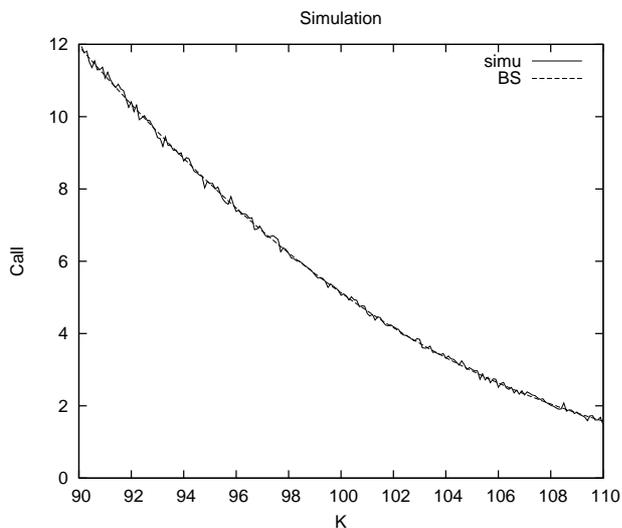


FIG. 1 – prix d'un Call ($r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

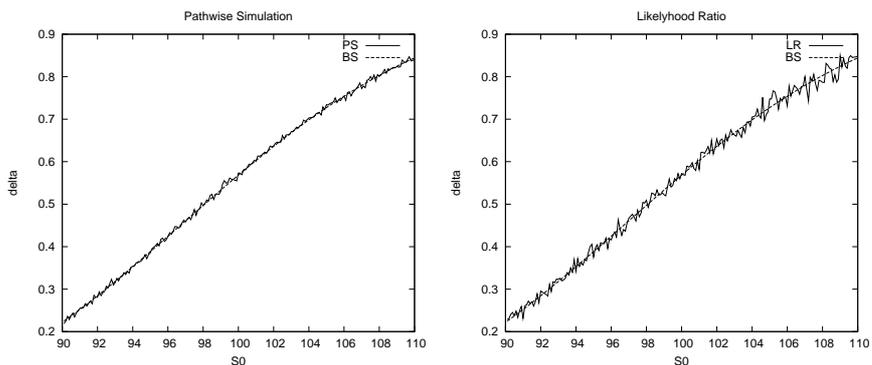


FIG. 2 – delta ($r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

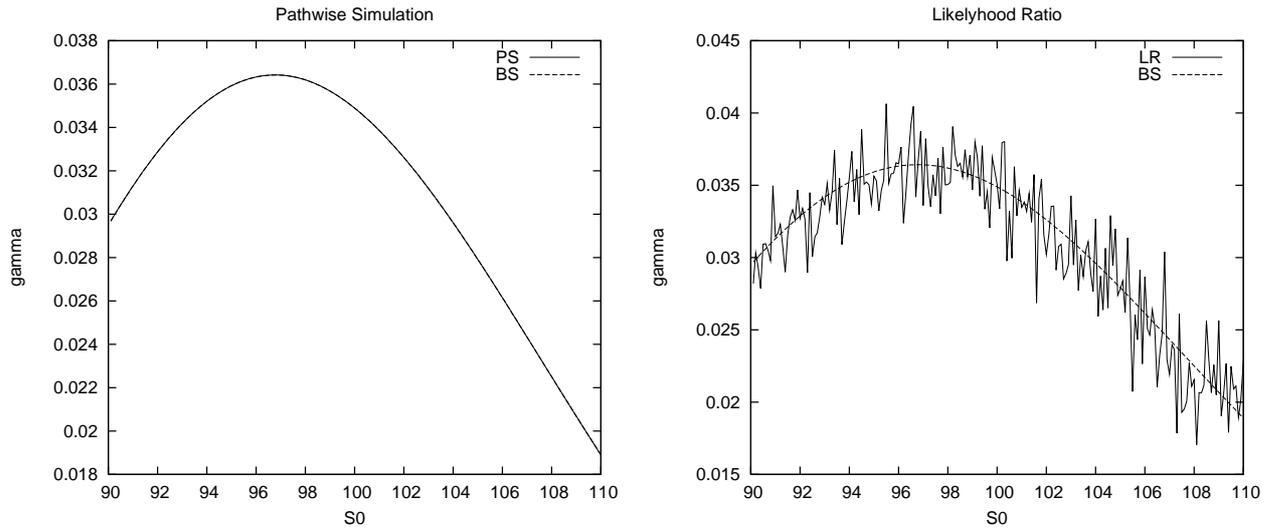


FIG. 3 – gamma ($r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

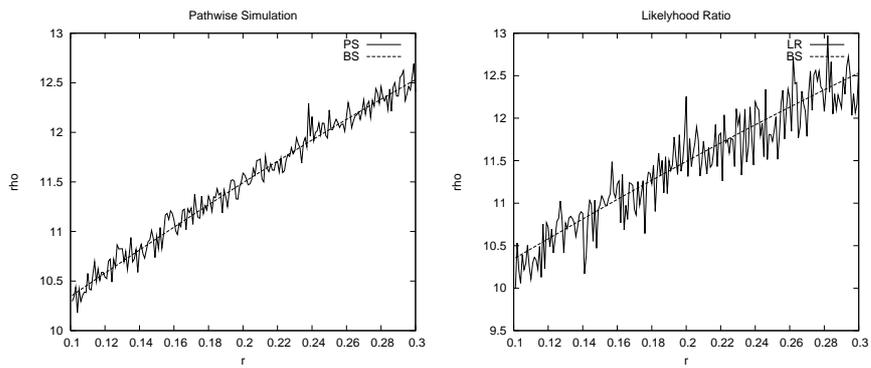


FIG. 4 – rho ($S_0=100$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

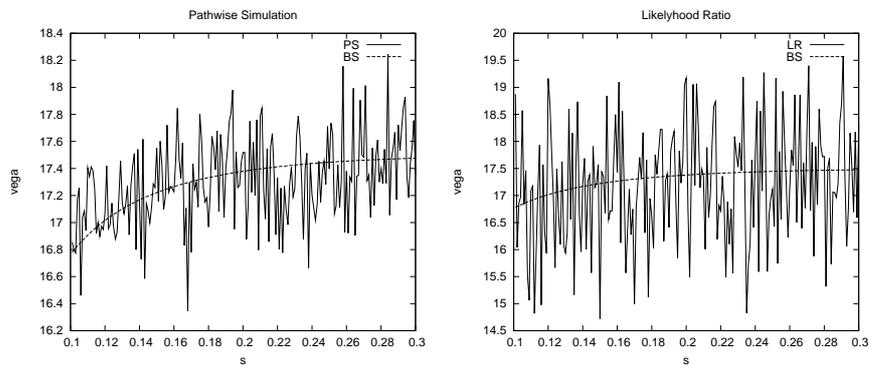


FIG. 5 – vega ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $K=100$, $T=0.2$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

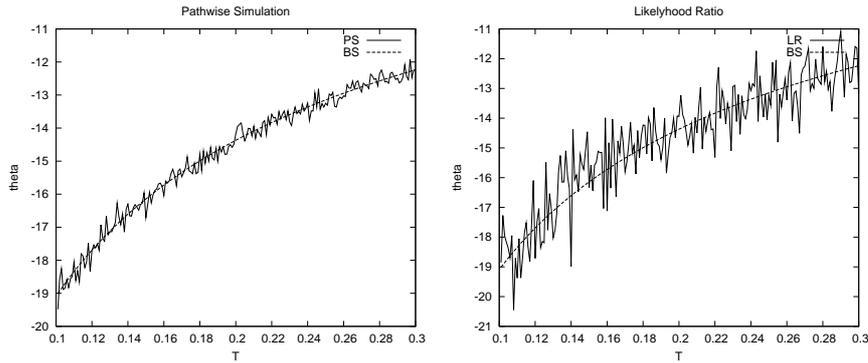


FIG. 6 – theta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$) - 200 pts, 10000 sim/pt et 100 acc/sim

4.5 Comparaison de ces deux méthodes : vitesse de convergence

La vitesse de convergence de ces deux méthodes n'est pas la même et il est intéressant de les comparer afin de pouvoir déterminer la méthode la plus adaptée suivant nos besoins : quelle est la meilleure méthode en terme de rapidité de calcul, la meilleure en terme de précision...

Etudions la convergence des méthodes pour le prix du Call et chaque grecque (fig. 7 à 12) :

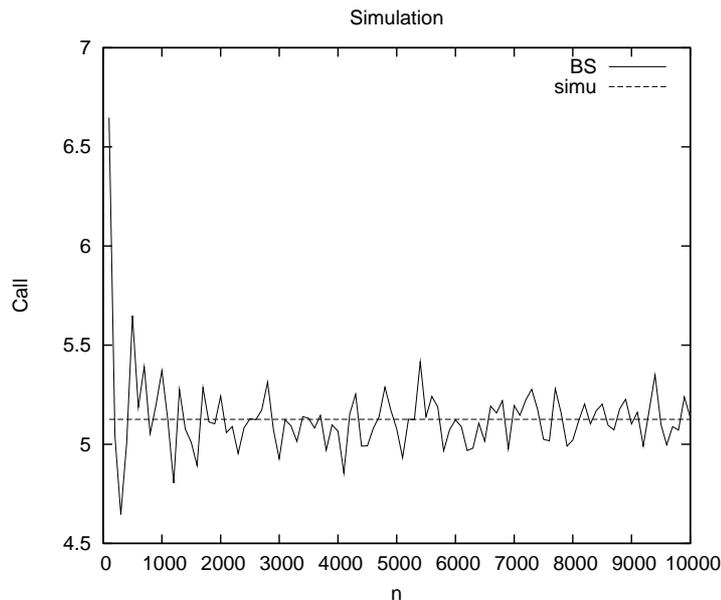


FIG. 7 – convergence du Call ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

Nous remarquons que la vitesse de convergence de la méthode *pathwise* est un peu plus grande que celle des *ratio de vraisemblance*. Les valeurs par cette première méthode sont en effet plus proches des valeurs théoriques données par la formule fermée de Black-Scholes. Ce résultat se vérifie dans quasiment toutes les simulations effectuées, que ce soit au niveau graphique ou numérique (cf tableau récapitulatif des valeurs obtenues).

Nous pouvons donc affirmer que la méthode *pathwise* semble meilleure pour estimer les grecques sur des options européennes versant des dividendes, les résultats sont plus précis et la vitesse de calcul est sensiblement la même que pour les *ratio de vraisemblance*.

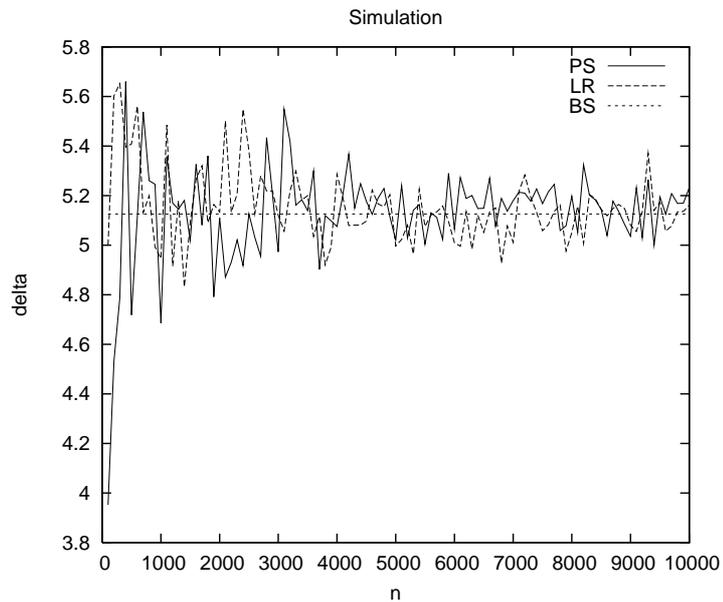


FIG. 8 – convergence du delta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

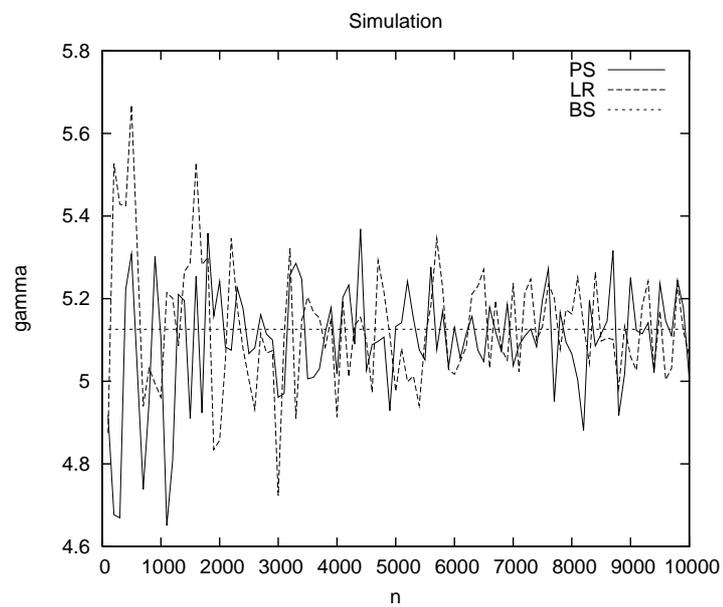


FIG. 9 – convergence du gamma ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

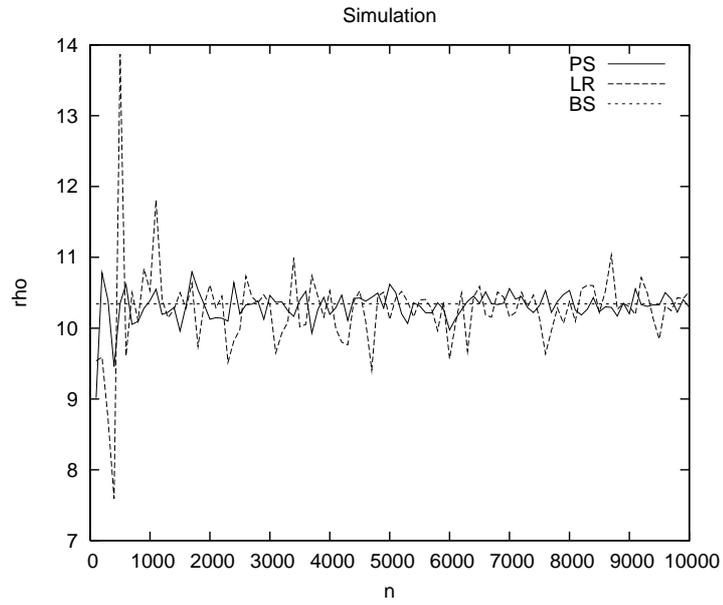


FIG. 10 – convergence du rho ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

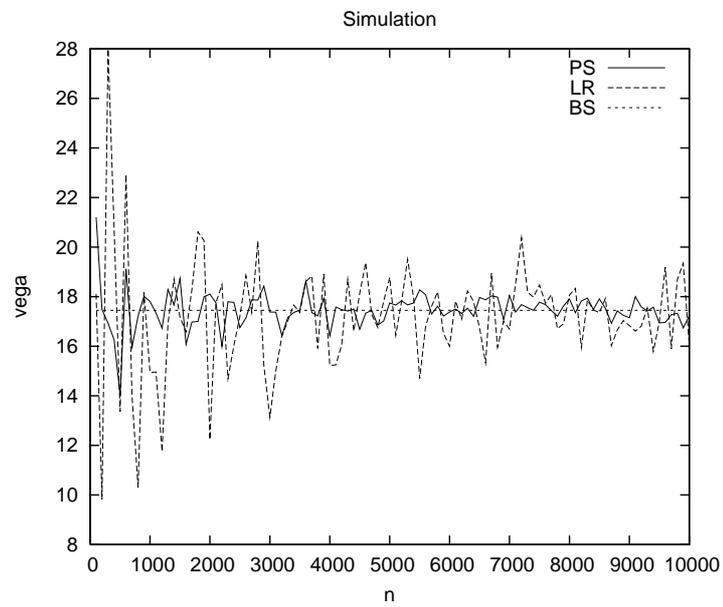


FIG. 11 – convergence du vega ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

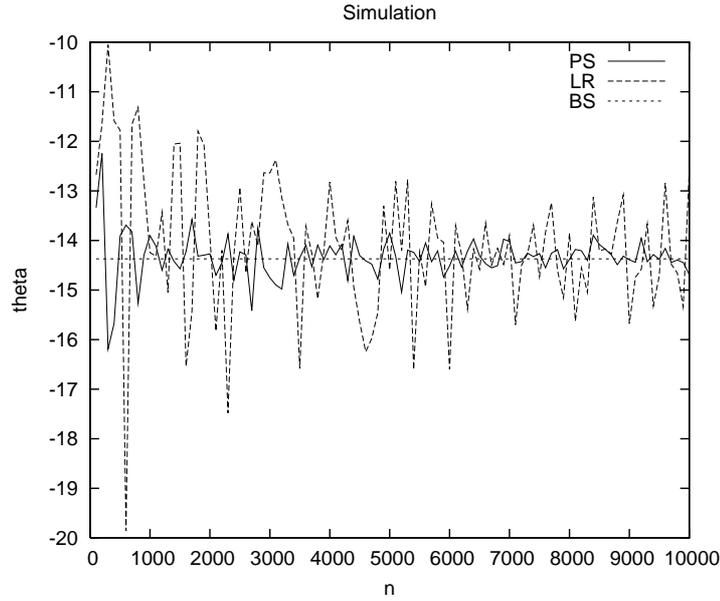


FIG. 12 – convergence du theta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts et 100 acc/sim

5 Les options asiatiques : options “path-dépendantes”

5.1 Généralités

Le problème qui apparaît avec une option asiatique est un problème d'inversion entre la dérivée et l'intégrale. En effet, une option asiatique est caractérisée par l'expression de son payoff qui diffère d'une option dite européenne. En fait, l'option asiatique fait intervenir la valeur moyenne du brownien.

Ainsi, le payoff s'écrit : $p = E\left(e^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)_+\right)$

Nous voyons bien apparaître ici le fait que nous allons devoir dériver le payoff de l'option sous le signe somme de l'espérance. Il n'existe pas de formule fermée pour calculer le prix de l'option ou de ses dérivées.

5.2 Estimation par la méthode *pathwise*

5.2.1 Expression des estimateurs

Le principe est toujours le même sauf qu'il faut tenir compte dans ce cas de la valeur moyenne puisque l'option asiatique est définie par un payoff sur moyenne.

Les estimateurs des grecques par cette méthode ne sont pas biaisés et s'expriment comme suit :

- **Delta** : $e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\bar{S}\geq K\}}\frac{\bar{S}}{S_0}$
- **Vega** : $e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\bar{S}\geq K\}}\frac{1}{m\sigma}\sum_{i=1}^m S_i\left(\ln\left(\frac{S_i}{S_0}\right) - (r - q + 0.5\sigma^2)t_i\right)$
- **Gamma** : $e^{-rT}\left(\frac{K}{S_0}\right)^2 mg(S_{m-1}, \omega_m, \Delta t_m)$ (cette formule ne donne pas de bons résultats numériques, nous avons donc cherché à l'améliorer - cf soutenance)
- **Rho** : $e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\bar{S}\geq K\}}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m t_i S_i - T(\bar{S} - K)\right)$
- **Theta** : $re^{-rT}max(\bar{S} - K) - \mathbb{1}_{\{\bar{S}\geq K\}}e^{-rT}\frac{\bar{S}}{2t_1}\left(\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + (r - q - 0.5\sigma^2)t_1\right)$

Avec les notations suivantes :

- $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$
- $\omega_m = m(K - \bar{S}) + S_m$
- $g(u, v, t) = \frac{n(d(u, v, t))}{v\sigma\sqrt{t}}$
- $d(u, v, t) = \frac{\ln(\frac{u}{v}) - (r - q - 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$

Remarque : la plupart de ces résultats étaient fournis dans nos documentations, cependant il y avait quelques erreurs (notamment pour le calcul de rho) que nous avons dû corriger afin d'obtenir des simulations cohérentes.

5.2.2 Quelques calculs d'estimateur

- L'expression de Δ pour une option asiatique qui est dépendante du temps entre 0 et T est :

$$\Delta = \frac{\delta}{\delta S_t} E \left(e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right)$$

Nous arrivons donc à déterminer Δ qui vaut :

$$\Delta = e^{-rT} E \left(\mathbb{1}_{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \geq K \right\}} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T S_u du}{S_0} \right) = \frac{1}{S_0} e^{-rT} E \left[\mathbb{1}_{\{\bar{S} \geq K\}} \bar{S} \right] = e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\bar{S} \geq K\}} \frac{\bar{S}}{S_0}$$

- Calcul de Rho ($rho = \frac{dp}{dr}$) : $P = e^{-rT} (\bar{S} - K)_+$ donc

$$\frac{\delta P}{\delta r} = \frac{\delta}{\delta r} e^{-rT} (\bar{S} - K)_+ = \frac{\delta e^{-rT}}{\delta r} (\bar{S} - K)_+ + e^{-rT} \frac{\delta (\bar{S} - K)_+}{\delta r} = -e^{-rT} T (\bar{S} - K)_+ + e^{-rT} \frac{\delta \bar{S}}{\delta r} \mathbb{1}_{\{\bar{S} \geq K\}}$$

Or $\frac{\delta \bar{S}}{\delta r} = \frac{1}{m} \sum \frac{\delta S_i}{\delta r}$ avec $S_i = S_0 e^{(r-q-0.5\sigma^2)t_i + \sigma\sqrt{t_i}z}$ et $\frac{\delta S_i}{\delta r} = t_i S_i$

$$\text{D'où } \frac{\delta P}{\delta r} = -T (\bar{S} - K)_+ + e^{-rT} \frac{\delta \bar{S}}{\delta r} \mathbb{1}_{\{\bar{S} \geq K\}} = e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\bar{S} \geq K\}} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i S_i - T (\bar{S} - K) \right)$$

5.3 Estimation par la méthode *likelihood ratio*

L'inversion entre la dérivée et l'intégrale due à l'espérance est justifiée par le fait que cette dérivée est définie et continue, et par les théorèmes usuels de convergence de l'intégrale.

5.3.1 Expression des estimateurs

Les estimateurs (non-biaisés) des grecques par cette méthode sont les suivants :

- **Delta** : $e^{-rT} \max(\bar{S} - K) \frac{1}{S_0 \sigma^2 \Delta t_1} \left(\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) - (r - q - 0.5\sigma^2) \Delta t_1 \right)$
- **Vega** : $e^{-rT} \max(\bar{S} - K) \sum_{i=1}^m \left(-d_i \frac{\delta d_i}{\delta \sigma} - \frac{1}{\sigma} \right)$
- **Gamma** : $e^{-rT} \max(\bar{S} - K, 0) \frac{d_1^2 - d_1 \sigma \sqrt{\Delta t_1} - 1}{S_0^2 \sigma^2 \Delta t_1}$
- **Rho** : $e^{-rT} \max(\bar{S} - K, 0) \left(-T + \sum_{i=1}^m \frac{d_i \sqrt{\Delta t_i}}{\sigma} \right)$
- **Theta** : $e^{-rT} \max(\bar{S} - K, 0) \left(r + d_1 \frac{\delta d_1}{\delta T} + \frac{1}{2\Delta t_1} \right)$

Avec les notations suivantes :

- $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$
- $d_i = \frac{\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - (r - q - 0.5\sigma^2) \Delta t_i}{\sigma \sqrt{\Delta t_i}}$
- $\frac{\delta d_i}{\delta \sigma} = \frac{\ln\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right) + (r - q + 0.5\sigma^2) \Delta t_i}{\sigma^2 \sqrt{\Delta t_i}}$

$$-\frac{\delta d_1}{\delta T} = \frac{-\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) - (r - q - 0.5\sigma^2)\Delta t_1}{2\sigma\Delta t_1^{3/2}}$$

5.4 Simulation et graphes

Voici les résultats de nos simulations résumés dans un tableau. Nous sommes dans le cas d'option d'achat asiatique sur action versant des dividendes. Par défaut les valeurs sont les suivantes : $S_o = 100, r = 0.1, q = 0.03, s = 0.25, K = 100, T = 0.2$.

Le nombre de simulations est de 100 000.

Prix du Call	$K = 90$	$K = 100$	$K = 110$
simulation	11.8817	3.68552	0.42228
delta	$S_o = 90$	$S_o = 100$	$S_o = 110$
Pathwise method	0.101063	0.635927	0.966037
LR method	0.0967842	0.635606	0.997417
gamma	$S_o = 90$	$S_o = 100$	$S_o = 110$
LR method	0.0259361	0.0295051	0.101171
vega	volatilité $\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.3$
Pathwise method	9.36715	9.63445	9.83362
LR method	5.00131	4.76007	4.31716
rho	rendement $r = 10\%$	20%	30%
Pathwise method	5.6955	6.10316	6.44242
LR method	5.73774	5.96918	6.53494
theta	temps $T = 0.1(\text{an})$	0.2	0.3
Pathwise method	-25.839	-21.7107	-18.9367
LR method	-22.9605	-19.222	-11.1542

Nous observons que les deux estimateurs donnent des résultats pas très proches, ils sont donc moins bons que les estimateurs que nous avons utilisé pour le call européen.

Voici les sorties graphiques de nos simulations de grecques sur option asiatique (fig. 13 à 17) :

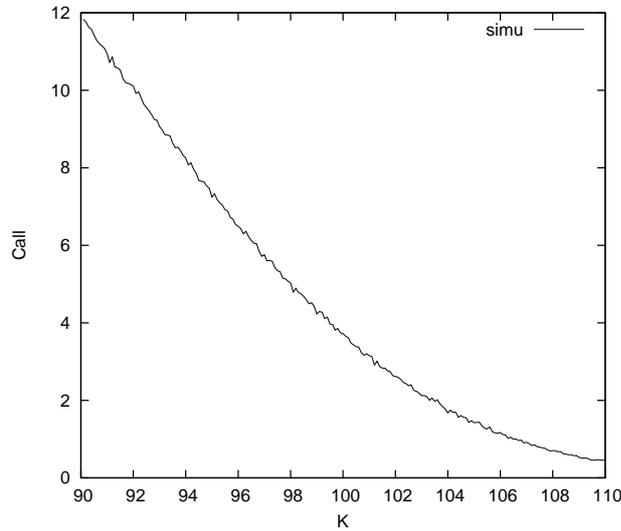


FIG. 13 – prix d'un Call ($r=0.1, q=0.03, s=0.25, K=100, T=0.2, m=T$) - 200 pts et 10000 sim/pt

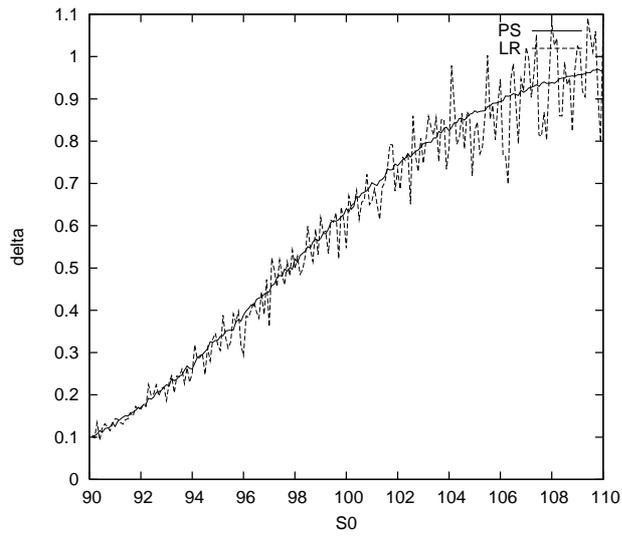


FIG. 14 – delta ($r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts, et 10000 sim/pt

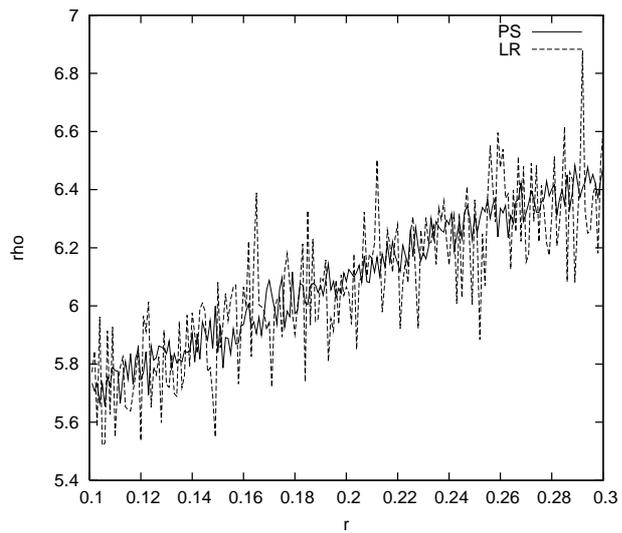


FIG. 15 – rho ($S_0=100$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts et 10000 sim/pt

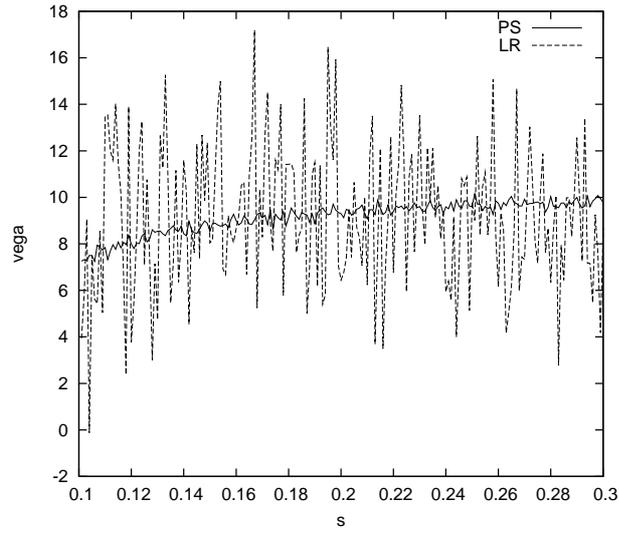


FIG. 16 – vega ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts et 10000 sim/pt

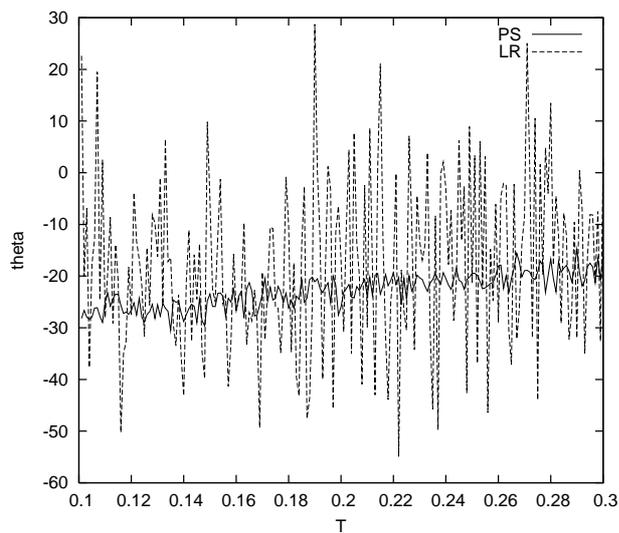


FIG. 17 – theta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $m=T$) - 200 pts et 10000 sim/pt

Nous remarquons que l'estimation par la méthode *pathwise* varie beaucoup moins que l'estimation par la méthode des *likelihood ratio*.

5.5 Convergence

La vitesse de convergence de ces deux méthodes n'est pas la même et il est intéressant de les comparer afin de pouvoir déterminer la meilleure méthode en terme de rapidité de calcul, la meilleure en terme de précision... Les graphes suivants montrent la convergence des méthodes pour le prix du Call et chaque grecque (fig. 18 à 22) :

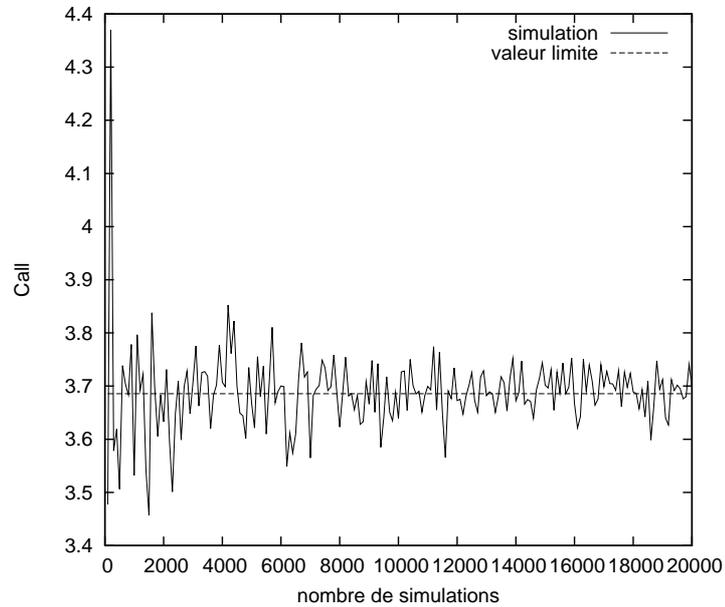


FIG. 18 – convergence du Call ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts

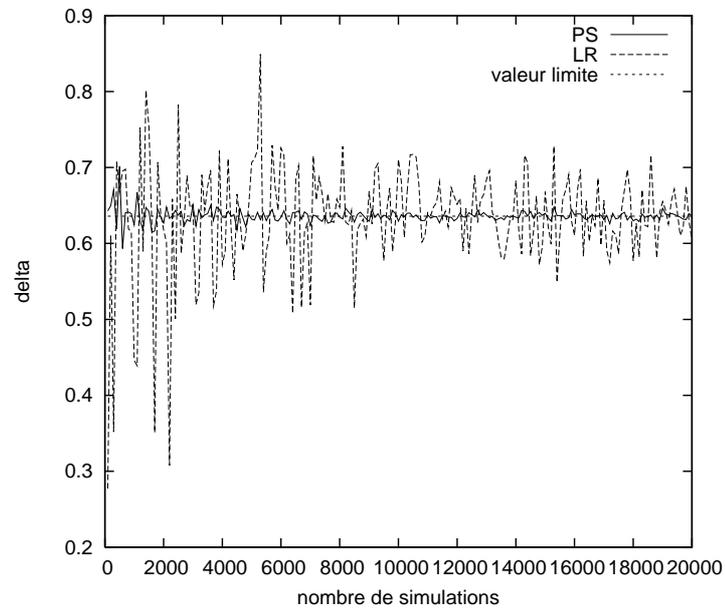


FIG. 19 – convergence du delta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts

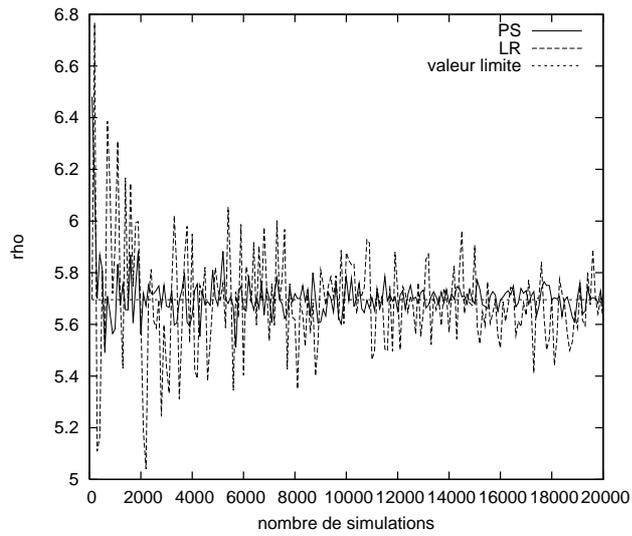


FIG. 20 – convergence du rho ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts

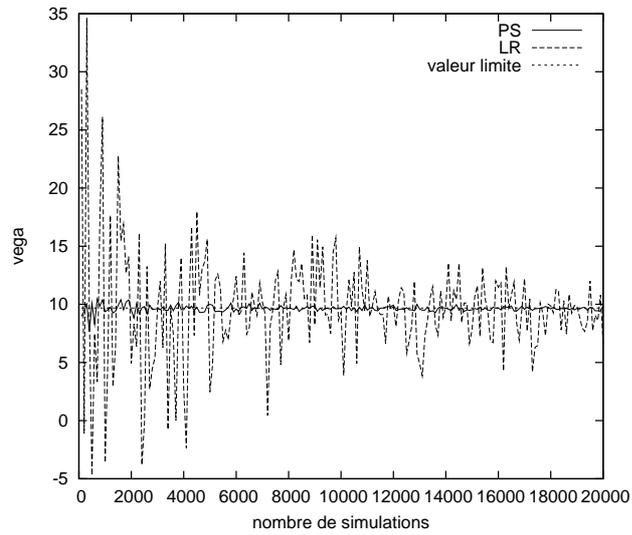


FIG. 21 – convergence du vega ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts

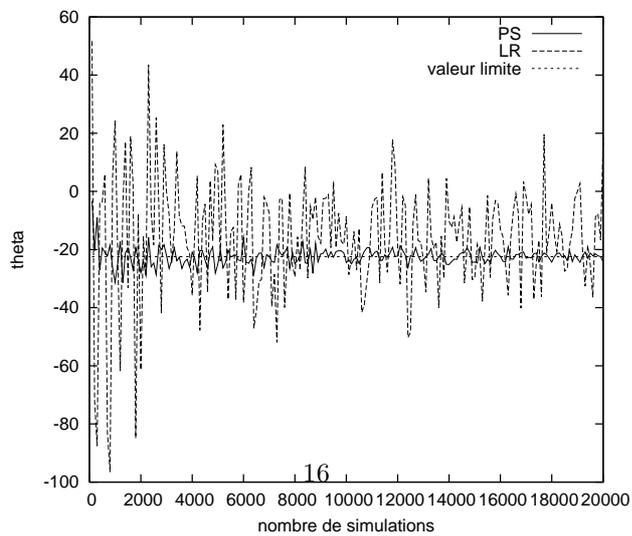


FIG. 22 – convergence du theta ($S=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$, $m=T$) - 200 pts

Au vu de ces graphes, la méthode *pathwise* est bien meilleure que celles des *likelihood ratio* dans le cas d'option asiatique. En effet, la précision est meilleure (nous sommes plus proche de la valeur "limite" calculée car il n'y a pas de formule fermée) et la convergence est plus rapide.

6 Observations sur les sensibilités suivant le type d'option

Nous pouvons extraire quelques conclusions de nos simulations, notamment sur la sensibilité du prix de l'option suivant les paramètres vus précédemment.

Il en ressort que :

- quand le strike augmente, le prix de l'option asiatique est moins cher que celui d'une option européenne, sinon pour un petit strike les deux prix sont relativement comparables,
- la sensibilité du prix de l'option au cours S_0 est plus forte pour l'option asiatique que pour l'option européenne. En effet, Δ varie plus dans le cas d'une option asiatique : à S_0 "petit" $\Delta_{asiat} < \Delta_{eur}$ tandis qu'à S_0 grand c'est le phénomène inverse qui se produit $\Delta_{asiat} > \Delta_{eur}$,
- la sensibilité au rendement est en revanche supérieure dans le cas de l'option européenne : nous observons que $\rho_{asiat} < \rho_{eur}$ globalement quelque soit le rendement de l'option,
- la sensibilité à la volatilité suit la même conclusion que pour le rendement, nous avons en effet une sensibilité à la volatilité très inférieure dans le cas de l'option asiatique $\nu_{asiat} < \nu_{eur}$,
- enfin la sensibilité à la maturité semble être globalement plus grande pour une option asiatique, $\Theta_{asiat} > \Theta_{eur}$.

Remarque : ces résultats paraissent-ils logiques ?

Nous pensons que ces résultats sont cohérents dans la mesure où il semble normal qu'une option qui dépende de la trajectoire sur une période entière (asiatique) et pas seulement du cours à l'échéance soit plus sensible à une variation de maturité. En revanche, les variations de rendement et de volatilité sont moins ressenties dans le cas d'une option asiatique puisqu'il s'agit d'une moyenne, donc les variations anormalement élevées que nous pouvons rencontrer à une date précise (l'échéance par exemple) sont compensées par le fait que nous prenons la moyenne.

7 Réduction de la variance pour le calcul des grecques

7.1 Principe

Afin que les calculs des grecques par la méthode de Monte Carlo convergent plus vite, il est possible de réduire la variance des estimateurs en utilisant un paramètre de contrôle (ici S_T). En effet, si l'estimateur utilisé était $\mathbb{E}[g(S_T)]$, l'idée est d'utiliser le nouvel estimateur $\mathbb{E}[g'(S_T)]$ avec $g'(S_T) = g(S_T) - \beta(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})$ où le paramètre réel β est choisi de façon à minimiser la variance de g' .

On a clairement $\mathbb{E}[g'] = \mathbb{E}[g]$ (car $\mathbb{E}[S_T] = S_0e^{(r-\delta)T}$) : si g était sans biais, g' le reste.

Donc la variance du nouvel estimateur s'écrit (en omettant le paramètre de g et g') :

$$\begin{aligned} Var(g') &= \mathbb{E}[g'^2] - \mathbb{E}[g']^2 \\ &= \mathbb{E}\left[g^2 - 2\beta g(S_T - S_0e^{(r-\delta)T}) + \beta^2(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})^2\right] - \mathbb{E}[g]^2 \\ &= \beta^2\mathbb{E}\left[(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})^2\right] - 2\beta\mathbb{E}\left[g(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})\right] + Var(g) \end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré atteint son minimum pour $\beta^* = \frac{\mathbb{E}[g(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})]}{\mathbb{E}[(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})^2]}$.

Or $\mathbb{E}[(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})^2] = Var(S_T)$,

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})\right] &= \mathbb{E}\left[(g - \mathbb{E}[g])(S_T - S_0e^{(r-\delta)T})\right] \\ &= Cov(g, S_T) \end{aligned}$$

(car $\mathbb{E} [\mathbb{E} [g] (S_T - S_0 e^{(r-\delta)T})] = \mathbb{E} [g] \mathbb{E} [(S_T - S_0 e^{(r-\delta)T})] = 0$)

La variance de l'estimateur contrôlé g' est donc minimale pour $\beta^* = \frac{Cov(g, S_T)}{Var(S_T)}$

Cependant, cette quantité β^* est rarement calculable. En effet, on ne connaît en général pas $\mathbb{E} [g]$ (c'est ce que l'on cherche à estimer!) et on ne peut donc pas calculer $Cov(g, S_T)$. Une solution est alors de se servir des n' premières simulations (où n' est bien inférieur au nombre de simulations) pour estimer $\hat{\beta}^*$ par

$$\hat{\beta}^* = \frac{\frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} g(S_{T,i}) S_{T,i} - \overline{g(S_T)}_{n'} S_0 e^{(r-\delta)T}}{\frac{1}{n'-1} \sum_{i=1}^{n'} S_{T,i}^2 - \frac{n}{n'-1} (S_0 e^{(r-\delta)T})^2}$$

(en utilisant la variance empirique débiaisée et la covariance empirique); puis d'évaluer le paramètre recherché avec les simulations suivantes par $\frac{1}{n-n'} \sum_{i=n'+1}^n g'(S_{T,i})$ avec le $\hat{\beta}^*$ estimé.

7.2 Résultats numériques

Nous avons appliqué cette méthode de réduction de la variance aux grecques des options européennes et asiatiques et obtenu les résultats suivants¹ :

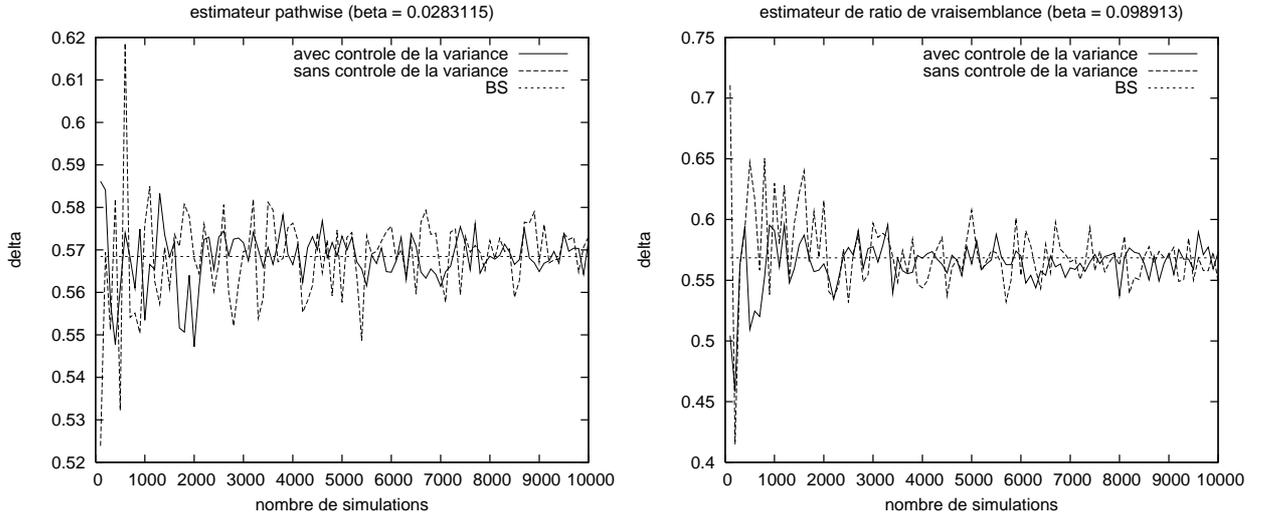


FIG. 23 – convergence du delta du call européen ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

¹Pour ne pas surcharger ce rapport, nous ne présentons que les graphes les plus représentatifs.

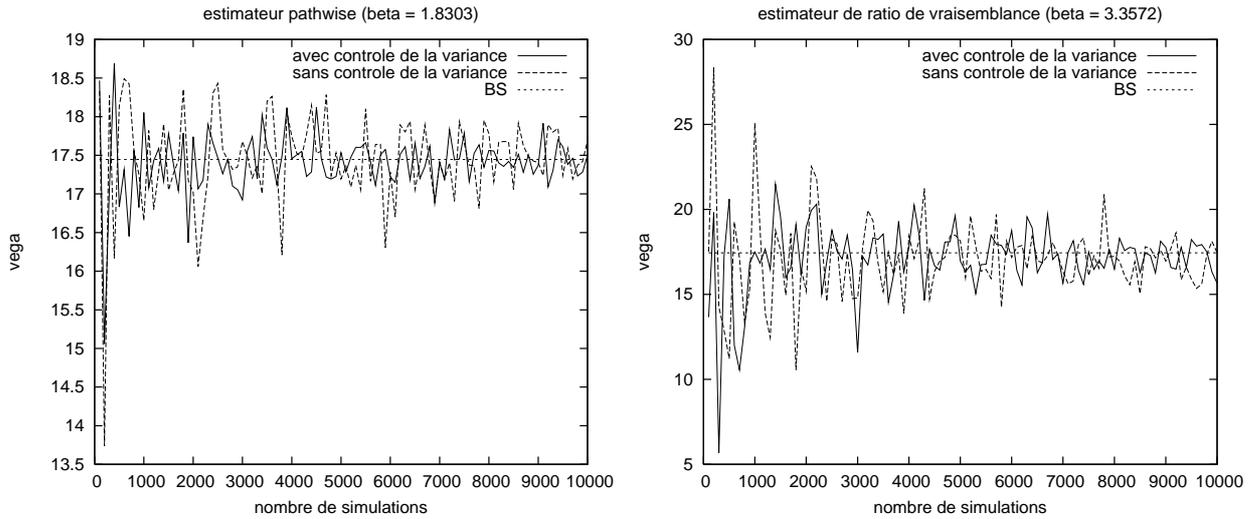


FIG. 24 – convergence du vega du call européen ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

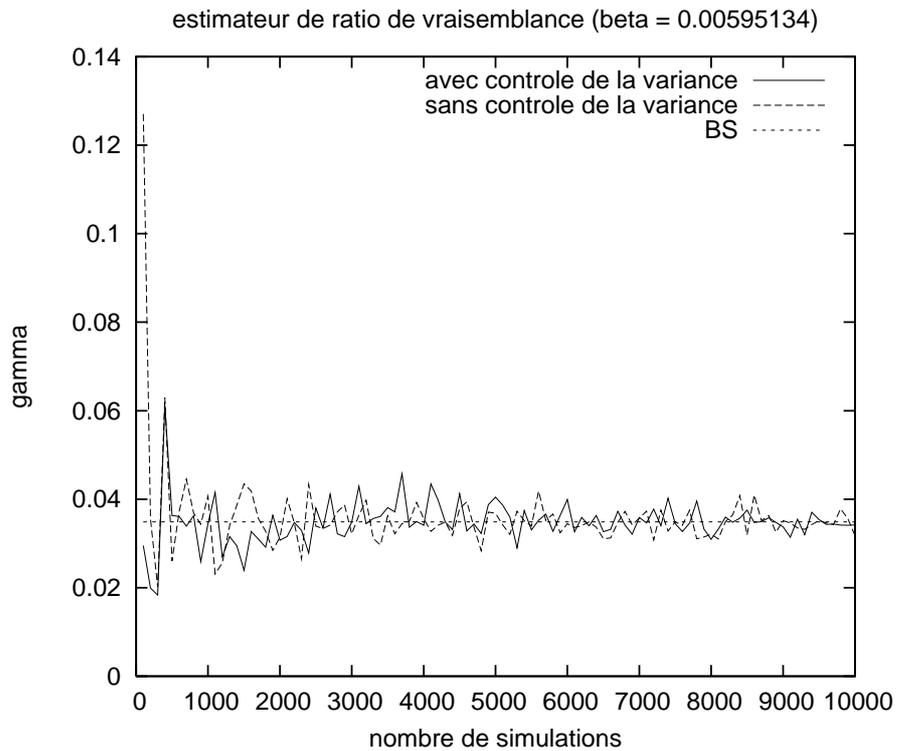


FIG. 25 – convergence du gamma du call européen ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

Pour ces simulations, nous avons d’abord consacré 1000 expériences préalables au calcul du β que nous avons alors utilisé pour toutes les simulations de la grecque.

Ces graphiques permettent de voir que, pour un petit nombre de simulations, le contrôle de la variance donne une bien meilleure précision que les simulations “classiques”. Cependant, et selon les grecques, l’utilité du contrôle de la variance est moins flagrant lorsque l’on effectue un grand nombre d’expériences, ce qui est

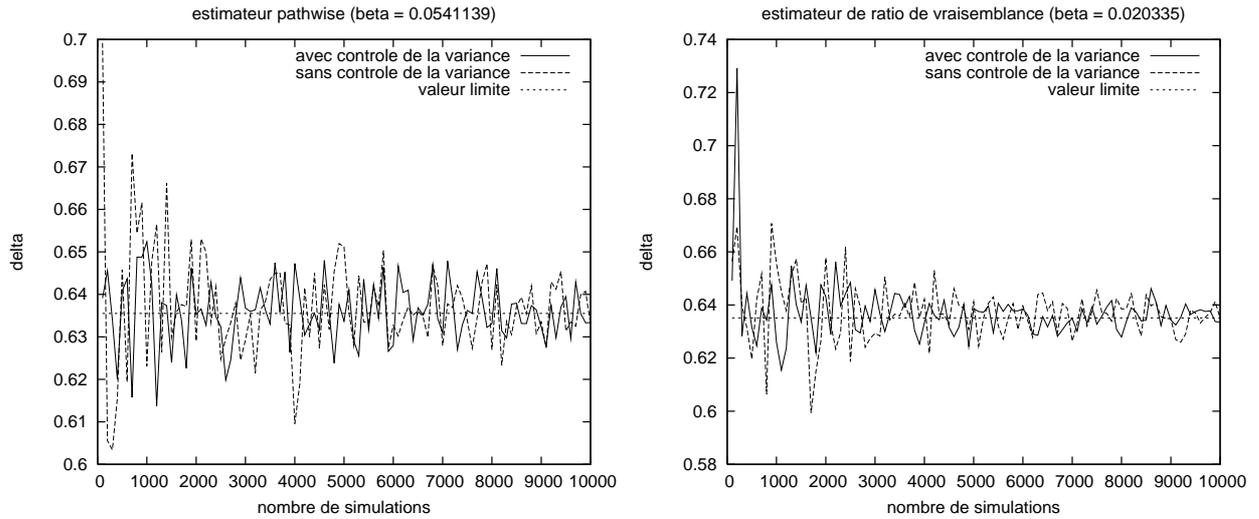


FIG. 26 – convergence du delta de l’option asiatique ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

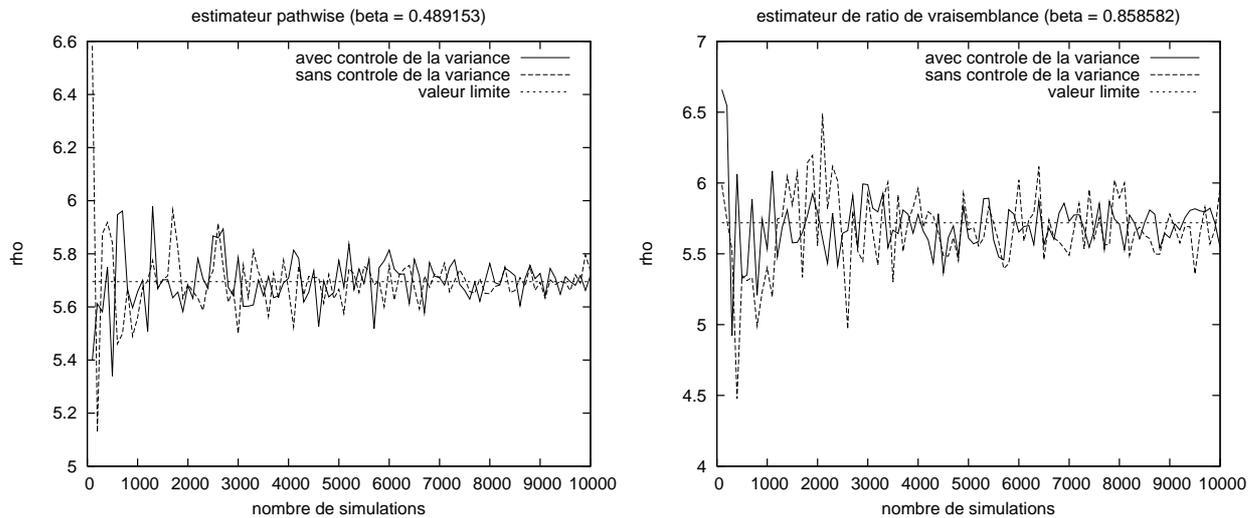


FIG. 27 – convergence du rho de l’option asiatique ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

normal car les deux estimateurs (classique et contrôlé) sont sans biais et convergents. En fait, l’estimation du β étant très rapide, effectuer les simulations de la grecque cherchée avec contrôle de la variance est un bon moyen d’avoir rapidement des résultats relativement précis en économisant des simulations des cours de l’action et donc du temps de calcul.

Remarquons enfin que nous avons choisi S_T comme variable de contrôle aussi bien pour le call européen que l’option asiatique (comme le font MM. Broadie et Glasserman dans leur article “Estimating Security Price Derivatives Using Simulation”). Si les délais l’avaient permis, nous aurions aimé approfondir cette partie sur le contrôle de la variance qui nous a semblé particulièrement utile en pratique pour garder un bon rapport précision / temps de calcul ; et essayer d’autres variables de contrôle, notamment $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$ pour l’option asiatique.

8 Le calcul Malliavin appliqué à une option asiatique

8.1 Principe

Le calcul Malliavin se rapproche de la méthode des *ratio de vraisemblance* au niveau de son fonctionnement. Il permet cependant d'améliorer la vitesse de calcul et sa précision, c'est pourquoi il s'avère très utile en finance dans la simulation des grecques. La différence avec la méthode des *ratio de vraisemblance* réside dans l'attribution de poids dans le cas du calcul Malliavin.

Ce calcul permet à l'aide d'une intégration par partie de déplacer la dérivée du payoff dans le noyau de diffusion, faisant apparaître un poids. Ainsi l'expression des grecques est :

$$Greek = E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} f(X_T) \times weight \right]$$

Il faut donc être capable de déterminer ce poids et les conditions qu'elle doit satisfaire.

Le fait que la dérivée disparaisse du payoff permet de calculer les grecques sur une plus grande panoplie d'option puisque la condition de dérivabilité du payoff n'est plus nécessaire, ce qui permet de faire des calculs même pour des payoffs discontinus. De plus, le poids ne dépend pas du payoff, ce qui facilite la simulation et permet à la méthode d'être efficace quel que soit le type de payoff.

8.2 Quelques calculs de grecques sur une option asiatique avec rendement et volatilité constants

8.2.1 Idée du calcul

Nous nous plaçons dans un espace probabilisé (Ω, F, P) .

Soit W un mouvement brownien et $(F_t)_{t \geq 0}$ la filtration adaptée.

Soit $F = f \left(\int_0^\infty h_1(t) dW_t; \dots; \int_0^\infty h_n(t) dW_t \right)$ où f, h_1, \dots, h_n assez régulier.

La dérivée de Malliavin est définie par $dF = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i} \left(\int_0^\infty h_1(t) dW_t; \dots; \int_0^\infty h_n(t) dW_t \right) h_i$.

En toute généralité, les grecques sont les dérivées d'une fonction du payoff. Nous pouvons par exemple écrire Δ sous la forme $\delta_x E \left[\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right]$.

L'expression de S_t est toujours celle d'un mouvement brownien géométrique :

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (r(s) - 0.5\sigma^2(s)) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s} \text{ (si le rendement et la volatilité sont variables).}$$

Nous obtenons donc dans ce cas comme dérivée de Malliavin $dS_t = S_t \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \sigma(s)$.

Enfin, nous utiliserons la proposition suivante dans nos calculs :

soit $\Phi : R^n \rightarrow R$ et $F = (F_1, \dots, F_n)$

$$d\Phi(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta \Phi}{\delta x_i} (F_1, \dots, F_n) dF_i$$

Donc $d\Phi(S_T) = \Phi'(S_T) \times S_T \mathbb{1}_{[0,T]}(t) \sigma(t)$

8.2.2 Le delta

Dans tout ce calcul, nous prendrons le rendement et la volatilité constants : $\sigma(s) = \sigma$ et $r(s) = r$, donc $S_t = S_0 e^{(r-0.5\sigma^2)T + \sigma W_T}$

Nous savons que le prix aujourd'hui de notre option est $P(x) = E^Q \left[f(X_T) e^{-rT} | F_0 \right]$ avec $f(X_T)$ qui représente la fonction payoff, donc $f(X_T) = (\bar{X} - K)_+$ dans le cas d'option asiatique.

Le delta s'exprime sous la forme suivante : $\Delta = \delta_x E \left[\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right]$.

Posons $U(x) = E \left[\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right]$, ainsi $\Delta = \delta_x U(x)$, or $S_t^x = x S_t^1$

D'où $U(x) = E \left[\Phi \left(x \int_0^T S_t^1 dt \right) \right]$, donc $U'(x) = E \left[\Phi' \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \int_0^T S_t^1 dt \right]$.

De plus, la dérivée de Malliavin s'écrit grâce à la propriété énoncée ci-dessus :

$$D_v \left(\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right) = \sigma \Phi' \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \int_u^T S_t^x dt$$

Nous pouvons donc réexprimer U' avec la dérivée de Malliavin.

$$\begin{aligned} & \Phi' \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \int_0^T t S_t^x dt = \Phi' \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \int_0^T \int_0^t S_t^x dv dt = \Phi' \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \int_0^T \int_v^T S_t^x dt dv \\ & = \int_0^T \sigma^{-1}(v) D_v \left(\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right) dv \end{aligned}$$

Donc $U'(x) = E \left[\frac{\int_0^T S_t^1 dt}{\int_0^T t S_t^x dt} \int_0^T \sigma^{-1}(v) D_v \left(\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right) dv \right] = E \left[\int_0^T D_v \left(\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \right) \left(\sigma^{-1}(v) \frac{\int_0^T S_t^1 dt}{\int_0^T t S_t^x dt} \right) dv \right] (*)$,
or d'après le lemme :

$$E(\langle DF, h \rangle) = E \left(\underbrace{\int_0^\infty h(t) dW_t}_{\text{intégrale de Skohorod}} \right) \text{ où } \delta(h) = \int_0^\infty h(t) dW_t$$

nous obtenons en utilisant le lemme :

$$(*) = E \left[\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \delta \left(\frac{\mathbb{1}_{[0,T]}(v) \int_0^T S_t^1 dt}{\sigma(v) \int_0^T t S_t^x dt} \right) \right]$$

Nous avons compris ces étapes du calcul, cependant nous n'arrivons pas à retomber sur la formule explicite que nous avons implémenté :

$$U'(x) = E \left[\Phi \left(\int_0^T S_t^x dt \right) \frac{\int_0^T S_t^1 dt}{\int_0^T t S_t^x dt} \left(\int_0^T \frac{1}{\sigma} dW_t + \frac{\int_0^T t^2 S_t^x dt}{\int_0^T t S_t^x dt} - \frac{1}{x} \right) \right]$$

Ce qui peut se réécrire en tenant compte du fait que la volatilité est constante :

$$E \left[\frac{1}{S_0} \left(\frac{\int_0^T S_t dt}{\int_0^T t S_t dt} \left(\frac{W_T}{\sigma} + \frac{\int_0^T t^2 S_t dt}{\int_0^T S_t dt} \right) - 1 \right) \right]$$

En simulant S_T nous pouvons retrouver W_T car $W_T = \frac{\ln(\frac{S_T}{S_0}) - (r - q - 0.5\sigma^2)T}{\sigma}$.

Ainsi, nous avons des résultats cohérents que vous verrez dans la section *Simulation*.

8.2.3 Le gamma

Ne maîtrisant pas tous les détails du calcul du delta, il nous a été impossible de développer un calcul et d'arriver à une formule pour le gamma. Nos recherches documentaires pour trouver une expression du poids n'ayant pas abouti, nous n'avons donc pas pu simuler le gamma par le calcul Malliavin.

8.3 Simulation

Voici quelques graphes associés à nos simulations du delta par le calcul Malliavin.

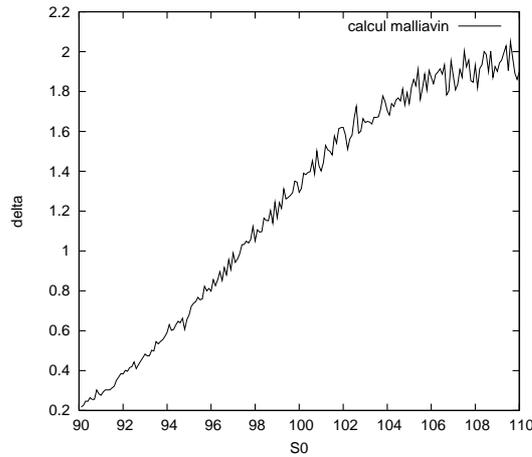


FIG. 28 – simulation de delta de l'option asiatique ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

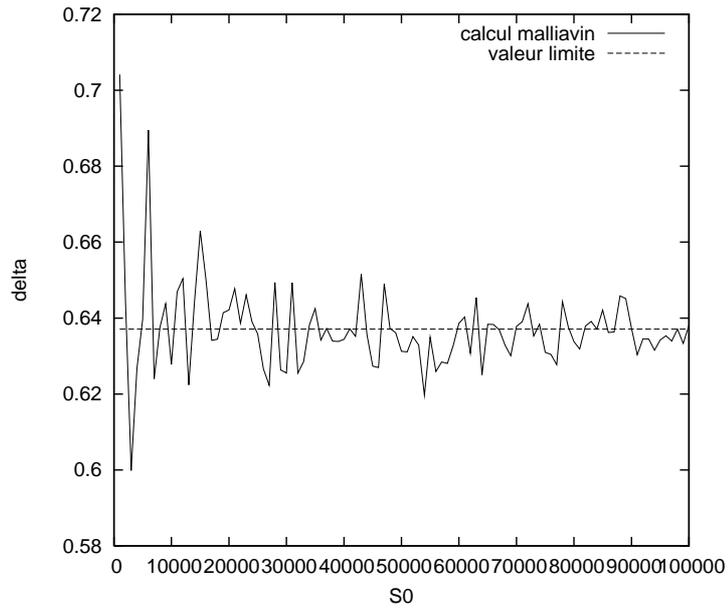


FIG. 29 – convergence de delta de l’option asiatique ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

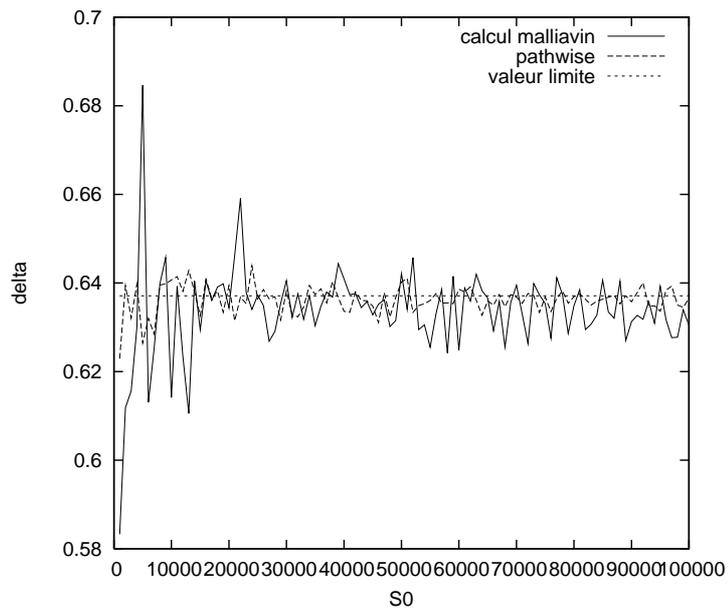


FIG. 30 – comparaison des convergences de delta de l’option asiatique ($S_0=100$, $r=0.1$, $q=0.03$, $s=0.25$, $K=100$, $T=0.2$) - 100 pts

Nous remarquons donc que dans le cas de l’option asiatique la simulation par la méthode *pathwise* reste la meilleure.

8.4 Bilan sur cette méthode

Plusieurs observations sont judicieuses :

- cette méthode est d’autant plus efficace que la fonction payoff est discontinue. Ceci est dû à l’intégration par partie qui fait apparaître un poids indépendant de la fonction payoff. Nous utiliserons donc en priorité cette méthode lors de simulation d’option de type digitale, exotique, simple ou double barrière par exemple,
- de plus, toutes les grecques peuvent être écrites comme l’espérance de la valeur du payoff multiplié par un poids, nous pouvons donc généraliser ces résultats pour le calcul de quelque grecque que ce soit,
- il n’est pas efficace en cas de courtes maturités car il introduit trop de bruit, certaines précautions sont donc à prendre dans ce cas-là.

Remarque : suite à cette série d’observations, nous réalisons qu’il serait donc particulièrement intéressant d’appliquer le calcul Malliavin aux points de discontinuité, et d’estimer les grecques par une méthode introduisant moins de bruit (exemple : simulation pathwise) là où les conditions de régularité sont satisfaites.

9 Conclusion générale

L’étude des grecques dans le cadre de ce projet nous a particulièrement intéressé et nous a permis de poser un premier pied dans le monde concret de la finance. En effet, les grecques sont des paramètres importants et très utilisés dans la gestion de risque et n’importe quel financier se doit de comprendre ce qu’ils représentent et comment les estimer.

Les méthodes numériques sont indispensables pour des options avec des payoff irréguliers ou un peu spéciaux (par exemple l’option asiatique) car il n’existe pas de formules fermées comme celle de Black-Scholes. La programmation de ces méthodes nous a pris du temps surtout que nous ne connaissions que très mal le langage C++, mais cela nous a permis de nous familiariser avec un outil très utilisé en finance.

Enfin, la découverte de la technique de réduction de variance dans les simulations par les méthodes *pathwise* et *likelihood ratio* a été également très enrichissante puisque nous gagnons beaucoup en précision sur des méthodes qui peuvent paraître relativement approximatives si des grosses sommes d’argent sont en jeu.

Nous avons également pu découvrir une autre méthode de calcul, le calcul Malliavin, dont la théorie est complexe mais qui nous a tout de même permis de faire quelques simulations supplémentaires.

Nous avons aimé le côté concret de ce projet et sa relation directe avec les notions que nous devons maîtriser dans un avenir immédiat pour notre travail.

10 Bibliographie

E. Benhamou, A generalisation of Malliavin weighted scheme for fast computation of Greeks, 2000. Downloadable at <http://ideas.repec.org/e/pbe39.html>.

E. Benhamou, Smart Monte Carlo : various tricks using Malliavin calculus. Quantitative finance, v 2, 2002.

M. Broadie et P. Glasserman, Estimating security price derivatives using simulation. Management science, vol 42, no.2, 1996.

J. Hull, Options, futures and others derivatives

E. Gobet, H. Guiol, Polycopié de cours de calcul stochastique, 2^{ème} année ENSIMAG