MILHAUD Xavier

TP4 de statistiques pour le 17/03/2008
- Etienne Marceau -

1 Exercice 1 : dépendance dans un portefeuille à deux risques

Question 1

Cette question consiste à calculer l'espérance et la variance de chacun des contrats du portefeuille. Une dépendance est introduite dans le modèle étudié.
Nous obtenons comme résultats :

- $E[X_1] = E[X_1^c + X_1^{nc}] = E[B_1^c I^c + B_1^{nc} I_1^{nc}] = E[B_1^c I^c] + E[B_1^{nc} I_1^{nc}] = E[B_1^c]E[I^c] + E[B_1^{nc}]E[I_1^{nc}]$.
  A.N. : $E[X_1] = 150 * 0,1 + 100 * 0,05 = 15 + 5 =$***20***

- $E[X_2] = E[X_2^c + X_2^{nc}] = E[B_2^c I^c + B_2^{nc} I_2^{nc}] = E[B_2^c I^c] + E[B_2^{nc} I_2^{nc}] = E[B_2^c]E[I^c] + E[B_2^{nc}]E[I_2^{nc}]$.

  A.N. : $E[X_2] = 250 * 0,1 + 200 * 0,08 = 25 + 16 =$***41***

- $Var[X_1] = Var[X_1^c + X_1^{nc}] = Var[X_1^c] + Var[X_1^{nc}]$ *avec* $Var[X_1^{nc}] = E[(X_1^{nc})^2] - (E[X_1^{nc}])^2$.
  Or $E[(X_1^{nc})^2] = P(I_1^{nc} = 1)E[(B_1^{nc})^2]$ *et* $E[(B_1^{nc})^2] = Var[B_1^{nc}] + (E[B_1^{nc}])^2$.

  A.N. : $Var[X_1] = 0.05 * (10000 + 100^2) - 5^2 + 0.1 * (150^2 + 150^2) - 15^2 =$***5 250***

- $Var[X_2] = Var[X_2^c + X_2^{nc}] = Var[X_2^c] + Var[X_2^{nc}]$*, puis on fait le même raisonnement.*

  A.N. : $Var[X_2] = 0.08 * (200^2 + 200^2) - 16^2 + 0.1 * (250^2 + 250^2) - 25^2 =$***18 019***

Aucun problème dans ces calculs avec la notion de dépendance puisque celle-ci n'existe qu'entre B_1^c *et* B_2^c*. En effet, tous les* I *et* B *sont indépendants entre eux, ce qui nous permet d'exprimer l'espérance et la variance d'une somme comme la somme des espérances et des variances.*

Question 2

Calculons la fonction de répartition de chaque risque constituant le portefeuille en différents points (discrétisation).
Pour cela, il faut d'abord trouver une expression explicite de cette fonction. C'est donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
P(X_1 \leq y) &= P(I_1^{nc} = 0, I_1^c = 0) + P(I_1^{nc} = 1, I_1^c = 0)P(B_1^{nc} \leq y) \\
&+ P(I_1^{nc} = 0, I_1^c = 1)P(B_1^c \leq y) + P(I_1^{nc} = 1, I_1^c = 1)P(B_1^c + B_1^{nc} \leq y) \\
&= P(I_1^{nc} = 0, I_1^c = 0) + P(I_1^{nc} = 1, I_1^c = 0)P(B_1^{nc} \leq y) \\
&+ P(I_1^{nc} = 0, I_1^c = 1)P(B_1^c \leq y) + P(I_1^{nc} = 1, I_1^c = 1)F_{B_1^c + B_1^{nc}}(y)
\end{aligned}$$

Nous constatons qu'il n'existe pas de forme explicite pour la somme de lois exponentielles avec des paramètres différents. Nous allons donc utiliser une méthode de discrétisation, nous prendrons la méthode "upper" afin de surestimer plutôt le risque.
Puis nous ferons tourner l'algorithme de Panjer afin de connaitre la fonction de répartition de cette somme. Les calculs sont fait en `R`*, nous obtenons le graphique ci-dessous (le code est disponible en annexes).*

On raisonne de même pour trouver $F_{X_2}(10k)$.

Question 3

Il faut calculer dans cette question la covariance entre les deux risques.
La covariance s'exprime comme suit :
$Cov(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$, *avec* $E(X_1X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

De plus,

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov(X_1^c + X_1^{nc}, X_2^c + X_2^{nc}) \\
&= Cov(X_1^c, X_2^c) + Cov(X_1^{nc}, X_2^{nc}) + Cov(X_1^c, X_2^{nc}) + Cov(X_1^{nc}, X_2^c) \\
&= Cov(X_1^c, X_2^c) \\
&= E[X_1^cX_2^c] - E[X_1^c]E[X_2^c] \\
&= E[I^cB_1^cI^cB_2^c] - E[X_1^c]E[X_2^c] \\
&= (E[(I^c)^2])E[B_1^cB_2^c] - (E[I^c])^2E[B_1^c]E[B_2^c]
\end{aligned}$$

Avec $E[B_1^cB_2^c] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b_1b_2f_{(B_1^c,B_2^c)}(b_1, b_2)db_1db_2$.
Nous pouvons trouver cette espérance avec l'expression de la copule qui modélise la dépendance.
Nous savons d'après le théorème de Sklaar que la fonction de répartition conjointe s'écrit :
$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = C_\alpha(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$, *où* α *est le paramètre de dépendance.*
Dans le cas de la copule F.G.M., l'expression est $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$

Finalement, nous arrivons à l'expression $E[B_1^cB_2^c] = \dfrac{4+\theta}{4\beta_1^c\beta_2^c}$.
Nous pouvons maintenant résumer les résultats numériques dans le tableau ci-dessous :

Valeurs de θ	$\theta = -1$	$\theta = -0.5$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$
Cov(X_1, X_2*)*	*2437.5*	*2906.25*	*3375*	*3843.75*	*4312.5*

Nous remarquons donc que quand θ *augmente, la dépendance devient plus forte.*

Question 4

Calculons l'espérance et la variance du portefeuille global :
$E[S_{tot}] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 20 + 41 =$ ***61***
$Var[S_{tot}] = Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2 * Cov(X_1, X_2)$, *varie suivant* θ.

Valeurs de θ	$\theta = -1$	$\theta = -0.5$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$
Var(S_{tot}*)*	*28144*	*2981.5*	*30019*	*30956.5*	*31894*

Question 5

Question 6

Il est demandé dans cette question de calculer $E[max(S_{tot} - 10k, 0)]$ *:*
On peut transformer cette écriture :
$F_{S_{tot}-10k}(x) = P(S_{tot} - 10k \leq x) = P(S_{tot} \leq x + 10k) = F_{S_{tot}}(x + 10k)$.

Question 7

Pour calculer la VaR, il s'agit de trouver le quantile associé à l'équation suivante :

$$VaR_\kappa(S_{tot}) = F^{-1}_{S_{tot}}(\kappa)$$

Le logiciel `R` *nous permet d'effectuer ces calculs grâce à la fonction* `optimize`.

2 Exercice 2

Question 8

Ce modèle de risque est un modèle binomial composé proposé pour la première fois par Gerber. Il modélise la dépendance en fonction du temps dans le processus d'occurence des sinistres. Ce modèle est connu particulièrement en théorie de la ruine, un domaine de recherche en plein essor depuis quelques années.
Dans ce contexte, le processus de surplus d'une compagnie d'assurance à des temps discrets se définit comme suit : $U_k = u + \sum_{j=1}^{k}(c - W_j)$*, où*

- *u est le surplus initial, donc le capital investi à la date 0 ,*
- *c est le taux de prime ,*
- W_j *le montant du sinistre éventuel au cours de la période j.*

De plus, nous avons comme expression pour W_j

$$\begin{cases} B_j, I_j = 1 \\ 0, I_j = 0 \end{cases}$$

Les variables aléatoires I_j *et* W_j *sont indépendantes sur chaque période,* I_j *est une variable aléatoire de Bernouilli et* W_j *est une variable aléatoire discrète strictement positive.*
Enfin, $(W_j)_j$ *forme une suite de variables aléatoires i.i.d., et les* I_j *sont indépendantes entre elles.*

Question 9

Cette question nous amène à quelques calculs :

- *Espérance de* W_j *:* $E[W_j] = E[I_j B_j] = E[I_j]E[B_j] = q * (1/r) = 0.05 * 16 = 0.8$
- *Variance de* W_j *:* $Var[W_j] = E[W_j^2] - (E[W_j])^2$ *avec* $E[W_j^2] = P(I_j = 1)E[B_j^2] = \frac{2q}{r^3}$
  Donc nous obtenons finalement : $Var[W_j] = 2 * (0.05 * 16^3) - 0.8^2 = 408.96$
- *Espérance de la sinstralité agrégée à la date k (*$S_j = W_1 + ... + W_j$*) :*
  $E[S_j] = E[W_1 + ... + W_j] = E[W_1] + E[W_2] + ... + E[W_j] = jE[W_1] = 0.8j$
- *Variance de la sinistralité agrégée à la date k : pour trouver cette variance il est intéressant de reécrire cette somme différemment. En effet,* $S_j = \sum_{i=1}^{M_j} B_i$ *où* M_j *suit une binomiale(q,j).*
  Ainsi, $Var[S_j] = E[M_j]Var[B] + (E[B])^2 Var[M_j]$*, et nous pouvons faire l'application numérique.*
  A.N. : $Var[S_j] = 0.05j * (2 - 1/16)/(1/16)^3 + 16^2 * 0.05 * 0.95 * j$

Question 10

Le surplus de la compagnie d'assurance peut s'écrire $U_k = u + k - S_k$ *car la prime vaut 1 à chaque période. L'expression de la probabilité de survie dans un temps fini vaut* $\Phi(u, k) = P(U_j \geq 0, j = 0, .., k)$*, et la probabilité de ruine est donc* $\psi(u, k) = 1 - \Phi(u, k)$*.*
Par un raisonnement logique sur une période, nous pouvons écrire :
$\Phi(u, k) = (1 - q)\Phi(u + 1, k - 1) + q \sum_{w=1}^{u} \Phi(u + 1 - w, k - 1) f_W$*, pour u=0,1... et n=1,2...*
Considérons que le surplus initial vaut 0 dans notre cas puisqu'aucune hypothèse n'est faite dessus, nous obtenons d'après les études de Willmot, Marceau and Cossette que la probabilité de survie s'exprime ainsi :

$$\Phi(0, k) = \frac{\sum_{m=0}^{k}(k - m + 1)g_m(k + 1)}{(1 - q)(k + 1)}, \text{ k=0,1,2... avec } g_m(k) = P(S_k = m).$$

Pour faire ce calcul, il nous faut donc connaitre la loi de S_k*.*

Nous pouvons aussi considérer ce modèle comme un cas particulier du modèle binomial composé de Markov. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\psi(u) = (1 - q)\psi(u|0) + q\psi(u|1) \text{ avec } \psi(u|i) = P\Big(sup_k(S_k - k) > u | I_0 = i\Big)$$

En faisant cette considération, nous avons une matrice de transition dont les termes sont les suivants :
$p_{00} = 1 - q$*,* $p_{01} = q$*,* $p_{10} = 1 - q$*,* $p_{11} = q$ *(en fait* $\pi = 0$*).*
L'avantage est ici que nous avons des relations récursives :

– *pour u=0 :*

$$\begin{aligned}\psi(0|0) &= \frac{q}{1-q}(E[B]-1)\\ \psi(0|1) &= \frac{p_{10}\psi(0|0)}{p_{00}}\end{aligned}$$

– *pour* $u \in N^+$ *:*

$$\begin{aligned}\psi(u|0) &= \psi(0|0) - \frac{q}{1-q}\sum_{k=1}^{u}(1-F_B(k))(1-\psi(u-k|1))\\ \psi(u|1) &= \psi(0|1) - \sum_{k=1}^{u}\frac{p_{01}(1-F_B(k))}{p_{00}}(1-\psi(u-k|1))\end{aligned}$$

Ces expressions correspondent au cas général. Grâce aux travaux de Cossette et Marceau, nous avons une expression explicite pour la probabilité de ruine dans le cas où les montants de sinistres suivent une loi géométrique tronquée(r). Ainsi nous obtenons our la probabilité de ruine non-conditionnelle :

$$\psi(u) = \psi(0)\left(\tfrac{1-r}{1-q}\right)^u \textit{ avec } \psi(0) = (1-q)\psi(0|0) + q\psi(0|1)$$

Cette expression a l'avantage d'être très simple et de se calculer facilement. Les calculs ont été implémentés en R et les résultats sont les suivants :

Question 11

Il s'agit dans cette question de trouver le plus petit k tel que $\psi(k) \leq \alpha$*, pour* $\alpha = 0.05, 0.025, 0.01$*. Les calculs ont été réalisés par tatônnement et les différents résultats sont :*

– *pour* $\alpha = 0.05$ *: k=210*
– *pour* $\alpha = 0.025$ *: k=262*
– *pour* $\alpha = 0.01$ *: k=331*

3 Exercice 3

Nous utilisons l'approximation Poisson composée qui nous donne W tel que W correspond à T_{tot} avec :

$$E[T_{tot}] = E[S_{tot}].$$

Nous fixons aussi $c = [(1+\theta)E[W]]$.
Je n'ai pas compris l'énoncé...

4 Annexes : code R des fonctions de simulation

Remarque : certains calculs ont été tapés en ligne de commande, notamment les calculs d'espérances et de variances, c'est donc normal qu'ils n'apparaissent pas dans ces programmes.

Voici le code qui nous a permis d'effectuer les calculs et de tracer les graphiques.

4.1 Exercice 1

4.2 Exercice 2

4.3 Exercice 3