R. Kheliouen, X. Milhaud - M2R SAF

Projet de théorie de la ruine :

Comparaison des modèles individuels de risque

Sous la direction de M. Lefèvre

ISFA - Avril 2008

Table des matières

1 Introduction

L'objet de cet article est de pouvoir comparer des modèles individuels de risque.
Pour cela les auteurs, `Claude Lefèvre` et `Sergey Utev`, requièrent à l'utilisation de la théorie sur les ordres et introduisent de nouvelles notions, particulièrement utiles dans le monde de l'assurance.
Ces notions vont nous servir dans le cadre de cette étude et vont nous permettre d'appréhender de manière plus générale la notion de risque global d'un portefeuille homogène.

En effet, les sciences actuarielles ont toujours été confrontées à un problème majeur : celui de connaître la fonction de répartition d'une somme de variables aléatoires.
Cet écueil est en général majeur et conduit à l'utilisation de certains algorithmes bien connus comme l'algorithme de `Panjer`. La bonne connaissance de la loi des sinistres agrégés permet à l'assureur de calculer des mesures de risque, et ainsi d'optimiser sa gestion du risque.
Ici la question est tout autre d'un point de vue scientifique : nous ne cherchons pas la distribution de la somme des sinistres mais bien une règle de comparaison entre deux sommes de sinistres sous certaines hypothèses. Cette théorie, bien plus générale, aurait l'avantage de donner une idée quantitative du risque d'un portefeuille nouveau connaissant le risque inhérent à un portefeuille connu.

Nous verrons dans un premier temps certaines propriétés que doivent satisfaire les ordres afin de pouvoir passer d'une comparaison sur la distribution d'un unique sinistre à une comparaison sur des portefeuilles homogènes composés de ces sinistres. Puis nous discuterons des conditions à réunir pour avoir ce résultat avec deux ordres nouveaux, le *hamr order* et le *Lorenz order*, et enfin nous essaierons d'en comprendre des applications classiques dans le monde de l'assurance.

2 Problématique

2.1 Les hypothèses des modèles

Dans un premier temps, présentons le modèle individuel de risque.
Ce modèle exprime la sinistralité agrégée d'un portefeuille sous la forme $S_X = \sum_{k=1}^{N} I_k A_k X_k$.
Plusieurs hypothèses sont alors faites :

- nous considérons le portefeuille homogène ; i.e. les distributions de montant des sinistres X_k sont supposées positives et identiquement distribuées ,
- la variable I_k désigne une variable aléatoire de Bernouilli ($I_k = 1$ en cas de sinistre) ,
- A_k est une variable aléatoire discrète représentant le facteur d'intérêt, car celui-ci peut être stochastique sur la période consiérée ,
- la fréquence ou le nombre de sinistres représentée par N, qui peut être aléatoire ou non.

De plus, nous supposons que la sévérité du k^{ieme} sinistre X_k est indépendante du triplet (N, A_k, I_k).
En revanche, les variables de ce triplet peuvent être interdépendantes.

2.2 Pourquoi cet article ?

Dans le monde des assurances de nombreuses applications nécessitent de pouvoir classer des modèles individuels de risque, lorsqu'un actuaire (par exemple !) veut quantifier son risque global. Il sait classer ses risques quand il les prend un par un, mais n'est pas sûr de pouvoir établir ce même classement lorsqu'il regroupe ces risques.
Quelques questions nous viennent alors immédiatement à l'esprit : soient les modèles individuels de risque S_X et S_Y associés respectivement aux risques X_k (= X si i.i.d) et Y_k (=Y), avec $X \leq Y$;

- sous quels ordres stochastiques travaille-t-on pour étudier S_X et S_Y ?
- les hypothèses sont-elles raisonnables dans la réalité ?

– à quelles conditions le même classement avec les modèles individuels de risque est respecté ?
– peut-on avoir une idée de la proportion finale entre les risques des deux modèles individuels si nous connaissons la différence en proportion entre les risques uniques initiaux ?

Autant de questions que cet article va nous permettre d'élucider, pour ainsi avoir une vision globale du risque du portefeuille et affiner notre culture dans la gestion de risque.

3 Les ordres stochastiques intégraux et leurs propriétés

3.1 Notions de stabilité

3.1.1 Généralités

Tout d'abord, il est possible de reécrire les sommes S_X et S_Y sous la forme suivante :

$$X_B = \sum_{i \in B} a_i X_i \text{ et } Y_B = \sum_{i \in B} a_i Y_i,$$

Avec B qui est un sous-ensemble de {1,...,n}, et n=1,2,...
Les densités de mélange s'écrivent

$$f(n, B, a) = P\big(N = n, \prod_{i \in B}(I_i = 1) \cap (A_i = a_i)\big)$$

Cette écriture est équivalente à considérer ces sommes de risques comme un mélange de variables aléatoires. De plus, les X_i sont indépendantes.

Par hypothèse : $F_k \leq G_k$, k=1,..,m où F_k est la marginale de X_k et G_k celle de Y_k. Afin de répondre à la question de savoir si quand nous avons $X \leq Y$ nous pouvons écrire $S_X \leq S_Y$, il faut que l'ordre considéré satisfasse les trois propriétés de stabilité suivantes :

– stabilité par mélange : $\forall p_1, ..., p_m \geq 0$ avec $p_1 + ... + p_m = 1$, $\sum_{k=1}^{m} F_k p_k \leq \sum_{k=1}^{m} G_k p_k$
– stabilité par convolution : $F_1 * ... * F_m \leq G_1 * ... * G_m$
– stabilité par changement d'échelle : avec $X \leq Y$, on a $\forall a \geq 0$ le résultat $aX \leq aY$

Si ces trois conditions sont remplies, alors nous pouvons affirmer que

$$X \leq Y \Rightarrow S_X \leq S_Y$$

Nous aurons alors pu répondre au problème initial.

3.1.2 Les ordres stochastiques intégraux

Les ordres stochastiques intégraux vérifient ces trois propriétés et rentrent donc dans le cadre où nous pouvons comparer directement les portefeuilles de modèle individuel de risque à condition d'avoir un ordre sur les marginales associées.
En effet, les ordres stochastiques intégraux sont tels que : $\forall f \in F$ (F est une classe de fonctions),

$$X \leq_F Y \text{ si } E[f(X)] \leq E[f(Y)]$$

A condition bien évidemment que les espérances existent.
Les ordres stochastiques intégraux vérifient ces trois propriétés et permettent donc de classer des modèles individuels de risque (en particulier si la fonction `f` de la définition ci-dessus est convexe nous avons quasi-immédiatement ces propriétés).

Les deux ordres stochastiques que nous étudions par la suite ne sont pas de cette classe, c'est pourquoi nous devons les étudier au cas par cas. Par contre, l'ordre stochastique convexe vérifie ces trois propriétés.

3.2 Complément sur la stabilité par convolution

Un résultat additionnel bien connu est qu'un ordre stochastique vérifie la propriété de convolution si et seulement si :

$$\forall X \text{v.a. et } Y_1,\, Y_2 \text{ v.a. indépendantes avec } Y_1 \leq Y_2, \text{ on a } X + Y_1 \leq X + Y_2$$

Nous utiliserons ce résultat par la suite afin de montrer la stabilité par convolution des ordres *hamr* et *Lorenz.*

4 The harmonic average mean remaining life order (hamr order)

Au même titre que le "Lorenz order", le "hamr order" (Harmonic Average Mean Remaining life order) est désormais considéré comme un ordre classique dans la théorie actuarielle.
On s'attellera dans cette partie à démontrer que l'ordre hamr ne pourra satisfaire aux différentes propriétés (stabilité par convolution, stabilité par mélange), que dans le cas où certaines hypothèses supplémentaires sont faites. Ces hypothèses seront explicitées ultérieurement.

Vocabulaire : On dit qu'une variable aléatoire X est NBUE (new better than used in expectation) si

$$E[X-u|X \geq u] \leq E[X],\, \forall u \geq 0$$

4.1 Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est infèrieure à une v.a Y selon l'ordre "hamr" (noté $X \leq_{hamr} Y$) si :

$$\frac{E[X-u]^+}{E[X]} \leq \frac{E[Y-u]^+}{E[Y]},\, \forall u \geq 0$$

Nous considérons que les espérances de ces variables aléatoires existent.

4.2 Stabilité par convolution

L'étude de la propriété de stabilité par convolution requiert l'étude de trois propriétés sous jacentes qui nous permettront d'arriver au résultat escompté, c'est-à-dire énoncer les hypothèses supplémentaires pour que l'ordre "hamr" soit stable par convolution.

Avant d'aborder les propriétés, on présentera quelques notations qui seront utilisées dans les paragraphes à venir. On note :
- $X =_{\leq} Y si X \leq Y et Y \leq X$,
- "$\leq_d$" l'ordre de distribution usuel ,
- on pose $\forall u \geq 0,\, H_X(u) = \dfrac{E[X-u]^+}{E[X]}$

4.2.1 Propriété 1

Soient X , Y deux v.a positives, avec $E(X) \leq E(Y)$. Alors $X =_{hamr} Y$ si et seulement si il existe une v.a "v" suivant une loi de Bernoulli et indépendante de Y, telle que $X =_d v * Y$.

Preuve :

On démontre d'abord la suffisance, on note $P(v=1) = p$, on a alors :
$H_X(u) = H_{vY}(u) = \dfrac{E[vY-u]^+}{E[vY]} = \dfrac{E[Y-u]^+P(v=1)}{E[Y]P(v=1} = H_Y(u),\, \forall u \geq 0$

Pour la condition nécessaire, on suppose que $X =_{hamr} Y$ équivalent à $\dfrac{\int_u^\infty P(X>v)dv}{E[X]} \leq \dfrac{\int_u^\infty P(Y>v)dv}{E[Y]}$

Ceci implique que $\int_u^\infty \left(\frac{P(X > v)}{E[X]} - \frac{P(Y > v)}{E[Y]}\right)dv = 0$, $\forall u \geq 0$, nous obtenons donc
$P(X > v) = \frac{E[X]}{E[Y]} P(Y > v)$ presque sûrement et comme la densité de probabilité est une fonction cadlag, cette égalité est vraie pour tout $u \geq 0$. On sait aussi que $E[X] \leq E[Y]$ donc la loi de X peut bien s' écrire sous la forme $v * Y$.

4.2.2 Propriété 2

Soient $\{X_k$: k=1,...,m$\}$ et $\{Y_k$: k=1,...,m$\}$ deux séries de v.a. indépendantes et positives, avec :

- $X_k \leq_{hamr} Y_k$, (1)
- $E[X_k] \leq E[Y_k]$, (2)
- X_k et Y_k sont toutes NBUE excepté pour une des variables X_k (notée X_{k_1}) et une des variables Y_k (notée Y_{k_2}) avec k_1 différent de k_2 , (3)

Alors

$$\sum_{k=1}^m X_k \leq_{hamr} \sum_{k=1}^m Y_k$$

Cette propriété est démontrée dans l'article de `de Pellerey` (1995,1996).

Nécessité de l'hypothèse (2)

Les auteurs (`Lefèvre` et `Utev`) démontrent par un contre exemple qu'en cas d'absence de lhypothèse (2), l'ordre “hamr” ne satisfait pas à la propriété de stabilité par convolution.

Preuve

Soient I, X, X1, X2 des v.a i.i.d. et positives, on considère que I suit une loi de Bernoulli (p) avec $0 < p < 1/4$ et que X, X_1, X_2 sont NBUE et non dégénérées au point 0. On pose $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = I * X_2$.

Grâce à la propriété 1 on peut écrire $Y_1 =_{hamr} Y_2$ comme $Y_2 \leq_{hamr} Y_1$ et $E(Y_2) \leq E(Y_1)$. Par application de la propriété 2, on obtient $X + Y_2 \leq_{hamr} X + Y_1$.

On suppose maintenant que $X + Y_2 \geq_{hamr} X + Y_1$, ce qui conduit à $X + Y_2 =_{hamr} X + Y_1$, il existe donc une v.a de Bernoulli v telle que :
$X_1 + I * X_2 =_d X + Y_2 =_d v * (X + Y_1) =_d v * (X + X_1) =_d v * (X_2 + X_1)$

Soit $P(v = 1) = u$ et $f(z) = E(zX)$, en égalisant les fonctions génératrices des moments des deux cotés de l'équation, on obtient :
$E(z^{X_1+IX_2}) = f(z) * [1 - p + pf(z)](1) = E(z^{v(X_1+X_2)}) = [1 - u + uf^2(z)](2)$
$(1) = (2)$ implique $f^2(z)(u-p) - f(z)(1-p) + (1-u) = 0$ pour tout z $\in [0, 1]$. Comme X est non dégénérée en 0, la fonction f(z) prend des valeurs arbitraires dans l'intervalle $(f(0), f(1)) = (A, 1)$.
Donc cette équation est vérifiée pour tout $z \in [0, 1]$ si et seulement si $x^2(u-p) - x(1-p) + (1-u) = 0$ pour tout $x \in (A, 1)$, résultat obtenu que si $p = u = 1$, ce qui est en contradiction avec $0 < p < 1/4$.

On vient de montrer que sans l'hypothèse “$E(X_k) \leq E(Y_k)$ pour k=1,,m” la propriété de stabilité par convolution, illustrée par $X + Y_2 \leq_{hamr} X + Y_1$, n'était pas satisfaite.

4.2.3 Propriété 3

La propriété suivante montre dans quelle mesure la condition “X_k et Y_k sont toutes NBUE” se révèle nécessaire et pas seulement suffisante pour assurer la propriété de stabilité par convolution de l'ordre “hamr”.
Soit X une v.a positive, les propositions suivantes sont équivalentes :

- A. : $X \leq_{hamr} X + Y$ pour toute v.a Y positive et indépendante de X,
- B. : X est NBUE,
- C. : $X + Y_1 \leq_{hamr} X + Y_2$ pour toutes les v.a Y_1, Y_2 positives, indépendantes de X et telles que $E(Y_1) \leq E(Y_2)$.

Preuve

On établit d'abord l'équivalence de (A) et (B) :
Notons $Z_u(a) = E[(X+a-u)^+ - (X-u)^+] = \int_{u-a}^{u} P(X \geq v)dv$, pour $a \geq 0$.
Par définition : $X \leq_{hamr} X+Y \Leftrightarrow E(Y)E(X?u)^+ \leq E(X)E(Z_u(Y))$ pour tout $u \geq 0$, cette équivalence est valable pour tout couple X , Y de v.a indépendantes et positives si et seulement si :

$$a * E(X-u)^+ \leq E(X) * E(Z_u(a)) \text{ pour tout } a, u \geq 0, (4)$$

D'un autre coté $E(X-u|X \geq 0) \leq E(X)$ est équivalent à écrire $E(X-u)^+ \leq E(X)P(X \geq u)$, (5)
Le passage à la limite $a \to 0$ dans l'expression (4) nous ramène à (5), donc l'expression $(A) \Rightarrow (B)$.

L'implication $(B) \Rightarrow (C)$ a été démontrée par `Pellerey` (1996).

Reste à démontrer l'implication $(C) \Rightarrow (A)$:
On remarque d'abord que $H_a(u) = \left(\frac{1-u}{a}\right)^+$ est croissante en fonction de a,
i.e $\epsilon \leq_{hamr} a$ quand $0 < \epsilon < a$, on pose $Y_1 = \epsilon$ et $Y_2 = a$.
La comparaison $X + Y_1 \leq_{hamr} X + Y_2$ conduit à :

$$(EX + a) * E(X + \epsilon - u)^+ \leq (EX + \epsilon) * E(X + a - u)^+, \text{ pour tout } u \geq 0, (6)$$

En passant à la limite $\epsilon \to 0$, la relation (6) conduit à la relation (4) qui est équivalente à (B), or on a déjà démontré que $(A) \Leftrightarrow (B)$ donc $(C) \Leftrightarrow (A)$.

4.2.4 Conclusion des propriétés 1,2 et 3

A travers les trois propriétés qui ont été présentées dans cette section, les auteurs ont démontré que l'ordre "hamr" n'était stable par convolution que si l'on faisait des hypothèses supplémentaires quant aux variables X et Y. Rappelons ces hypothèses :
- $E(X_k) \leq E(Y_k)$ pour k=1.m,
- X_k et Y_k sont toutes NBUE excepté pour une des variables X_k (notée X_{k_1}) et une des variables Y_k (notée Y_{k_2}) avec k_1 différent de k_2.

4.3 Stabilité par mélange

A l'instar de la propriété précédente (stabilité par convolution), la propriété de stabilité par mélange n'est satisfaite par l'ordre "hamr" qu'avec une hypothèse supplémentaire.
Cette supplémentaire s'énonce comme suit :
Soient $\{X_k$: k = 1,..,m$\}$ et $\{Y_k$: k = 1,..,m$\}$ deux séries de v.a indépendantes et positives, avec $\dfrac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c$, "c" est une constante et k = 1,.,m ; (7)

Preuve

Par définition, la propriété de mélange pour l'ordre "hamr" s'écrit :

$$\sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[X_k - u]^+ E[Y_i] \leq \sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[Y_k - u]^+ E[X_i], (8)$$

A l'aide de l'hypothèse (7) et partant du fait que $X_k \leq_{hamr} Y_k$, on retrouve l'expression (8) :

$$E[X_k - u]^+ E[Y_i] = \frac{E[X_k - u]^+}{E[X_k]} E[X_k]E[Y_i] \leq \frac{E[Y_k - u]^+}{E[Y_k]} E[X_k]E[Y_i],$$

Avec $\dfrac{E[Y_k - u]^+}{E[Y_k]} E[X_k]E[Y_i] = E[Y_k - u]^+ E[X_i] \Big(\dfrac{E[X_k]}{E[Y_k]} / \dfrac{E[X_i]}{E[Y_i]}\Big)$, or $\Big(\dfrac{E[X_k]}{E[Y_k]} / \dfrac{E[X_i]}{E[Y_i]}\Big) = \frac{c}{c} = 1$
Donc $E[X_k - u]^+ E[Y_i] \leq E[Y_k - u]^+ E[X_i]$,
Finalement, $\sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[X_k - u]^+ E[Y_i] \leq \sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[Y_k - u]^+ E[X_i]$

4.3.1 Nécessité de la condition (7)

Les auteurs démontrent par un contre exemple qu'en cas d'absence de l'hypothèse (7), l'ordre "hamr" ne satisfait pas à la propriété de stabilité par mélange, d'où sa nécessité.
Pour cela on fixe les constantes positives a et u de telle manière que $1 < 1 + a < u < 3/2$ et $m = 2$, $p1 = p2 = 0.5$ et $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, $Y_1 = a + 1$, $Y_2 = 4 + a$.
On remarque d'abord que $X_1 \leq_{hamr} Y_1$ et $X_2 \leq_{hamr} Y_2$ mais que la condition (7) n'est pas satisfaite.
Le calcul des quantités $\sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[X_k - u]^+ E[Y_i]$ et $\sum_{k,i=1}^{m} p_i p_k E[Y_k - u]^+ E[X_i]$ nous permettra de vérifier si l'ordre "hamr" sans la condition (7) satisfait à la propriété de stabilité par mélange. Nous avons :
$L = 1/4E(X_2 - u)^+(E(Y_1 + E(Y_2)) = 1/4(4 - u)(5 + 2a)$
$R = 1/4E(Y_2 - u)^+(E(X_1 + E(X_2)) = 1/4(4 + a - u)5$
On en déduit $L > R$ pour tout $u < 3/2$.
$\Rightarrow$ l'ordre "hamr" n'est pas stable par mélange.

4.3.2 Conclusion sur la stabilité par mélange

Les auteurs ont démontré que l'ordre "hamr" n'était stable par mélange que si l'on faisait une hypothèse supplémentaire quant aux variables X et Y. On rappelle cette hypothèse :

$\frac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c$, c est une constante et k = 1,.,m.

4.4 Stabilité par changement d'échelle

La stabilité par changement d'échelle est triviale car il suffirait de noter $u^{'} = u * a$ pour obtenir le résultat escompté.

$$\text{Soit } X \leq_{hamr} Y \Rightarrow \frac{E[X-u]^+}{E[X]} \leq \frac{E[Y-u]^+}{E[Y]} \Rightarrow \frac{a*E[X-u]^+}{a*E[X]} \leq \frac{a*E[Y-u]^+}{a*E[Y]}$$
$$\Rightarrow \frac{E[aX-au]^+}{E[aX]} \leq \frac{E[aY-au]^+}{E[aY]} \Rightarrow \frac{E[aX-u^{'}]^+}{E[aX]} \leq \frac{E[aY-u^{'}]^+}{E[aY]} \Rightarrow a*X \leq_{hamr} a*Y$$

Nous avons donc le résultat.

5 The Lorenz order

Cet ordre stochastique est devenu classique en actuariat.
Il est donc important de le connaitre, de savoir ses propriétés et d'être capable de l'utiliser pour des champs d'application appropriés. Dans cette section, nous verrons donc les similitudes et les différences avec d'autres ordres, et surtout comment utiliser cet ordre.
Autrement dit, sous quelles hypothèses peut-il nous servir à répondre à la problématique ? Comment classer des modèles de risques individuels dans ce cas ?

5.1 Définition

On dit que X est infèrieur à Y selon l'ordre de Lorenz, que nous notons $X \leq_l Y$, lorsque :

$$\frac{X}{E[X]} \leq_{cx} \frac{Y}{E[Y]} \text{ ; i.e. quand } E\Big[f\Big(\frac{X}{E[X]}\Big)\Big] \leq E\Big[f\Big(\frac{Y}{E[Y]}\Big)\Big] \text{ pour toute fonction } \mathbf{f} \text{ convexe.}$$

Bien sûr, cette définition n'est valable qu'à condition que les espérances de ces variables aléatoires existent. On remarque également que cet ordre est directement lié à l'ordre stochastique convexe qui lui est stable pour les trois propriétés. C'est ce qui va nous permettre d'aboutir aux résultats suivants.

5.2 Stabilité par convolution

Nous allons voir dans cette section que la stabilité par convolution pour l'ordre de *Lorenz* est vérifiée sous certaines conditions à rajouter.
En effet, nous avons le résultat suivant :

Propriété
Soient $\{X_k$: k=1,...,m$\}$ et $\{Y_k$: k=1,...,m$\}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes dans un ensemble G telles que

$$X_k \leq_l Y_k \text{ et}$$
$$\frac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c \text{ pour k=1,...,m et c une constante.}$$

Alors $\sum_{k=1}^m X_k \leq_l \sum_{k=1}^m Y_k$

Remarque :
Nous distinguons bien la différence ici puisque nous avons rajouté la condition $\frac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c$.
Nous verrons dans la preuve pourquoi nous devons avoir cette condition pour avoir la stabilité par convolution.

Preuve de la propriété : il est clair que si pour chaque k , le rapport $\frac{E[X_k]}{E[Y_k]}$ est constant, nous avons le même rapport pour $\frac{\sum_{k=1}^m E[X_k]}{\sum_{k=1}^m E[Y_k]}$. Ainsi $\frac{\sum_{k=1}^m E[X_k]}{\sum_{k=1}^m E[Y_k]} = \frac{E[X_k]}{E[Y_k]}$, ce qui entraîne $\frac{E[X_k]}{\sum_{j=1}^m E[X_j]} = \frac{E[Y_k]}{\sum_{j=1}^m E[Y_j]}$.
Nous noterons ce rapport r_k, et c'est la condition qui nous permet d'avoir ce rapport.

De plus, $X_k \leq_l Y_k \Rightarrow \frac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} \frac{Y_k}{E[Y_k]}$, or l'ordre convexe est stable par changement d'échelle, ce qui signifie que $\forall k = 1, ..., m; r_k \frac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} r_k \frac{Y_k}{E[Y_k]}$.

L'ordre convexe est également stable par convolution, ce qui nous permet de sommer sur les k, nous obtenons : $\sum_{k=1}^m r_k \frac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} \sum_{k=1}^m r_k \frac{Y_k}{E[Y_k]}$; en remplaçant r_k par son expression nous avons finalement $\sum_{k=1}^m \frac{E[X_k]}{\sum_{j=1}^m E[X_j]} \frac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} \sum_{k=1}^m \frac{E[Y_k]}{\sum_{j=1}^m E[Y_j]} \frac{Y_k}{E[Y_k]} \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\sum_{k=1}^m E[X_k]} \leq_{cx} \frac{\sum_{k=1}^m Y_k}{\sum_{k=1}^m E[Y_k]}$, équivalent à

$$\boxed{\sum_{k=1}^m X_k \leq_l \sum_{k=1}^m Y_k} \text{ d'après la définition.}$$

Nous avons donc le résultat !

En quoi cette condition est-elle nécessaire ?
Prenons l'exemple suivant qui est en fait un raisonnement par l'absurde :
Supposons que le résultat de stabilité par convolution est vérifié, i.e.

$$\forall X \text{v.a. et } Y_1,\, Y_2 \text{ v.a. indépendantes avec } Y_1 \leq Y_2, \text{ on a } X + Y_1 \leq_l X + Y_2$$

Prenons X telle que $E[X] = 1$ et Y telle que $E[Y] = 1$.
On peut comprendre par la définition que pour des v.a. Z, U $\in G$, $Z =_l U \Leftrightarrow \frac{Z}{E[Z]} =_d \frac{U}{E[U]}$,
de plus, $aZ =_l bZ$ puisque $\frac{aZ}{E[aZ]} =_d \frac{aZ}{aE[Z]} =_d \frac{Z}{E[Z]} =_d \frac{bZ}{bE[Z]}$.

Prenons maintenant $Y_1 = aY$ et $Y_2 = bY$, d'où $X + Y_1 \leq_l X + Y_2 \Rightarrow X + aY \leq_l X + bY$.
Nous avons vu que a ou b sont indifférents car $aZ =_l bZ$, donc nous avons en fait $X + aY =_l X + bY$.

En prenant $a = 1$ et l'égalité $\dfrac{Z}{E[Z]} =_d \dfrac{U}{E[U]}$, nous obtenons : $\dfrac{X+Y}{E[X+Y]} =_d \dfrac{X+bY}{E[X+bY]}$

Soit $X + Y =_d (X + bY)\dfrac{E[X+Y]}{E[X+bY]} = (X + bY)\dfrac{E[X]+E[Y]}{E[X]+bE[Y]} =_d (X + bY)\left(\frac{2}{1+b}\right)$.

Or cette égalité n'est vraie que dans des cas particuliers (ex : si $X = Y = 1$ presque sûrement, ou X et Y suivent une distribution de Cauchy à espérance finie).
Nous voyons donc toute l'utilité de cette hypothèse supplémentaire.

5.3 Stabilité par mélange

Nous avons vu au début de ce rapport que les modèles individuels de risque pouvaient être vus comme des mélanges de variables aléatoires, d'où l'intérêt d'étudier la stabilité par mélange de l'ordre de *Lorenz*.
Nous allons voir que la condition supplémentaire imposée pour avoir la stabilité par convolution est également indispensable pour avoir la stabilité par mélange.
Cependant, nécessitons-nous d'une autre hypothèse ?

Dans notre cas, nous avons le résultat suivant :

Propriété
Soient $\{X_k$: k=1,...,m$\}$ et $\{Y_k$: k=1,...,m$\}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes dans un ensemble G telles que

$$X_k \leq_l Y_k \text{ et}$$
$$\frac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c \text{ pour k=1,...,m et c une constante.}$$

Alors $\sum_{k=1}^{m} p_k X_k \leq_l \sum_{k=1}^{m} p_k Y_k$

Remarque : il s'agit de la même hypothèse ajoutée que précédemment.

Preuve de la propriété : nous faisons le même raisonnement.
En effet, de la même manière que dans la démonstration précédente, le rapport $\dfrac{E[X_k]}{E[Y_k]}$ étant constant, nous avons le même rapport pour $\dfrac{\sum_{k=1}^{m} p_k E[X_k]}{\sum_{k=1}^{m} p_k E[Y_k]}$. Ainsi $\dfrac{\sum_{k=1}^{m} p_k E[X_k]}{\sum_{k=1}^{m} p_k E[Y_k]} = \dfrac{E[X_k]}{E[Y_k]}$, ce qui entraîne $\dfrac{E[X_k]}{\sum_{j=1}^{m} p_j E[X_j]} = \dfrac{E[Y_k]}{\sum_{j=1}^{m} p_j E[Y_j]} = s_k$, pour k=1,...,m.

De plus, $X_k \leq_l Y_k \Rightarrow \dfrac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} \dfrac{Y_k}{E[Y_k]}$, or l'ordre convexe est stable par changement d'échelle, ce qui signifie que $\forall k = 1, ..., m; s_k \dfrac{X_k}{E[X_k]} \leq_{cx} s_k \dfrac{Y_k}{E[Y_k]}$.

Nous allons maintenant traduire cette écriture grâce à la caractérisation vue plus haut de l'ordre convexe.

Nous obtenons (en remplaçant par l'expression de s_k) :

$$\begin{aligned}
E\Big[f\big(s_k\frac{X_k}{E[X_k]}\big)\Big] &\leq E\Big[f\big(s_k\frac{Y_k}{E[Y_k]}\big)\Big] \\
\sum_{k=1}^{m} p_k E\Big[f\big(s_k\frac{X_k}{E[X_k]}\big)\Big] &\leq \sum_{k=1}^{m} p_k E\Big[f\big(s_k\frac{Y_k}{E[Y_k]}\big)\Big] \\
\sum_{k=1}^{m} p_k E\Big[f\big(\frac{X_k}{\sum_{j=1}^{m} p_j E[X_j]}\big)\Big] &\leq \sum_{k=1}^{m} p_k E\Big[f\big(\frac{Y_k}{\sum_{j=1}^{m} p_j E[Y_j]}\big)\Big]
\end{aligned}$$

On reconnait l'écriture de la stabilité par mélange vue au début !

$$\boxed{\text{Sous la condition } \frac{E[X_k]}{E[Y_k]} = c, \text{ l'ordre de } \textit{Lorenz} \text{ est donc stable par mélange.}}$$

Cette condition est-elle indispensable ?
Pour répondre à cette question, nous allons prendre un contre-exemple : soient X, Z deux v.a. indépendantes de distribution exponentielle négative de paramètre 1.
Prenons $X_1 =_d X$, $X_2 =_d X$, $Y_1 =_d X$ et $Y_2 =_d aX$ (on prendra $a, b > 0$).
Posons également $X_1 \leq_l Y_1$ et $X_2 \leq_l Y_2$.
Nous supposons la stabilité par mélange satisfaite pour deux variables, avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$ et $p_1 + p_2 = 1$.
Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
p_1 F_{X_1} + p_2 F_{X_2} &=_d p_1 F_{Y_1} + p_2 F_{Y_2} \\
p_1 F_X + p_2 F_X &=_d p_1 F_{X/b} + p_2 F_{aX/b} \\
(p_1 + p_2) F_X &=_d p_1 F_{X/b} + p_2 F_{aX/b} \\
F_X &=_d p_1 F_{X/b} + p_2 F_{aX/b}
\end{aligned}$$

Cette expression nous amène donc directement par remplacement des fonctions de répartition à

$$e^{-x} = p_1 e^{-bx} + p_2 e^{-(b/a)x} \text{ pour } x \geq 0.$$

Mais nous réalisons que ceci est possible dans le seul cas où $a = b = 1$, ce qui signifie que le mélange ne serait composé que de variables aléatoires identiquement distribuées. Or cette contrainte est énorme puisque dans la réalité, les risques d'un portefeuille sont rarement identiquement distribués.
Nous voyons donc tout l'intérêt de l'hypothèse ajoutée.

5.4 Stabilité par changement d'échelle

Nous avons vu que la stabilité par changement d'échelle ne posait pas de problème dans les démonstrations faites car l'ordre de *Lorenz* est défini à partir de l'ordre convexe qui lui-même est stable par changement d'échelle.

6 Résultats essentiels

Avant de faire une conclusion sur le projet, passons d'abord en revue les principaux résultats concernant les ordres "Lorenz" et "hamr".

6.1 Ordre hamr

L'étude de la stabilité par convolution et par mélange de l'ordre "hamr" a montré que celui-ci ne satisfaisait pas à ces propriétés. Des hypothèses supplémentaires doivent donc être faites pour les assurer.
Pour la stabilité par convolution, les hypothèses sont les suivantes :
- $E(X_k) \leq E(Y_k)$ pour k=1.m,

- X_k et Y_k sont toutes NBUE excepté pour une des variables X_k (notée X_{k_1}) et une des variables Y_k (notée Y_{k_2}) avec k_1 différent de k_2.

Pour la stabilité par mélange, une seule hypothèse doit être ajoutée :
pour $\{X_k$: k = 1,..,m$\}$ et $\{Y_k$: k = 1,..,m$\}$ deux séries de v.a indépendantes et positives, le rapport des espérances de X_k et Y_k doit être constant, ie c est une constante et k = 1,.,m.

6.2 Ordre Lorenz

Idem à l'ordre "hamr", l'ordre "Lorenz" ne satisfait aux propriétés de stabilité par convolution et par mélange qu'après lajout dune condition supplémentaire. On fait remarquer que la condition est identique pour les deux propriétés et quelle est commune à la condition de stabilité par mélange de l'ordre "hamr".

6.3 Relation entre les ordres "hamr" et "Lorenz"

Les auteurs donnent deux résultats intéressants établissant un lien entre ces deux ordres :
- a) une relation d'implication sous la forme :
  $X \leq_l Y$ et $E(X) \leq E(Y) \Rightarrow X \leq_{hamr} Y$, la réciproque n'est cependant pas vraie.
- b) à partir de la relation précédente, les auteurs font l'extension aux montants de sinistres globaux S_X et S_Y :

$$X \leq_l Y \text{ et } E(X) \leq E(Y) \Rightarrow S_X \leq_l S_Y \text{ et } S_X \leq_{hamr} S_Y$$

7 Conclusion du projet

Les auteurs répondent la question initiale que posait cette étude, c'est à dire : sous quelle(s) condition(s) un ordre entre des montants de sinistres X et Y implique-t-il le même ordre entre les montants de sinistres globaux S_X et S_Y ?
La principale condition que retiennent les auteurs est que les montants de sinistres notés X et Y doivent tre NBUE (new better than used in expectation).
Enfin d'un point de vue personnel, ce projet a été une bonne occasion d'acquérir un peu plus de connaissances en gestion de risque, et nous a notamment permis de nous familiariser avec des outils dont nous n'avions jamais entendu parler jusqu'alors. Il nous semble important de réaliser ce genre d'études car elles nous permettent d'appréhender concrètement les applications des outils mathématiques sous-jacents, en ayant en amont une compréhension des outils utilisés ; ce qui est primordial dans le monde du travail.
Nous en retirons donc une bonne expérience, enrichissante et amusante d'un point de vue scientifique.