ISFA M2R SAF

Projet de Théorie Financière

Intra-period Risk, Jump Risk, and the Basel Multipliers
D'après Gurdiv Bakshi et George Panayotov (2007)

Edouard May, Xavier Milhaud, Thierry Moudiki

25 mars 2008

Table des matières

1 Contexte général de l'étude

Les mesures de risque servent à quantifier l'exposition au risque du portefeuille d'une entreprise ou d'une institution financière. Il en existe plusieurs différentes, et elles doivent en général vérifier un certain nombre de propriétés. La mesure de risque la plus populaire et la plus utilisée en gestion des risques est la *Value at Risk* ou VaR. Il s'agit du montant minimal des pertes susceptibles d'affecter le portefeuille d'une entreprise sur une certaine période, avec une probabilité fixée. Formellement, si on modélise les pertes d'un portefeuille par une variable aléatoire positive X, la Value at Risk de niveau de confiance ϕ est le quantile d'ordre $1-\phi$ de la distribution de X soit :

$$\mathbb{P}(X \geq VaR_\phi) = \phi$$

Bien que la VaR soit la mesure des pertes de fonds propres imposée aux banques par les accords de Bâle (1996), elle a été largement discutée et contestée dans la littérature. L'un des principaux reproches faits à la mesure VaR est qu'elle n'est pas sous-additive. Autrement dit, qu'elle ne rend pas compte du fait qu'un portefeuille de deux risques mutualisés soit moins risqué à gérer que deux risques pris individuellement. Par ailleurs, pour calculer la VaR on observe des cours à deux dates relativement éloignées, négligeant ainsi ce qui peut se produire entre les deux dates, le *intra-period risk* ou risque intra-période. Pour finir, l'hypothèse que les rendements des prix des actifs sont gaussiens (prix modélisés par un mouvement brownien géométrique) est souvent faite. Pourtant dans la réalité, en situation de crise ou suite à des annonces sur les marchés, la trajectoire des prix des actifs présente des discontinuités. L'hypothèse de normalité des rentabilités est donc à remettre en cause. Ce risque est dénoté ici par *jump risk* ou risque de saut.

Pour compenser les faiblesses de la VaR, le comité de Bâle a suggéré aux banques de multiplier leur VaR interne par un coefficient compris entre 3 et 4. Dans la littérature (par exemple Stahl(1997)), on justifie le multiplicateur compris entre 3 et 4 à partir de l'inégalité de Markov (inégalité de Chebychev) appliquée en supposant que la distribution de gains et pertes sur une petite période est de moyenne nulle. Il vient :

$$\phi = \mathbb{P}(|X| \geq VaR_\phi) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{VaR_\phi^2} = \frac{\sigma_X^2}{VaR_\phi^2}$$

Si on fait l'hypothèse que les rendements des actifs sont de loi normale, alors :

$$VaR_\phi = Q_\phi \leq \frac{\sigma_X}{\sqrt{\phi}}$$

, l'inégalité venant de la relation précédente. Q_ϕ est la valeur absolue du quantile d'ordre ϕ d'une loi normale standard. Le multiplicateur M_ϕ de la VaR normale est obtenu à partir de la relation :

$$Q_\phi M_\phi = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

Pour des niveaux $\phi = 1\%$ ou $\phi = 5\%$, on trouve respectivement

$$M_{1\%} = 2.7; M_{5\%} = 4.3$$

Cependant, l'inégalité de Chebychev est assez faible et suppose seulement l'existence d'un moment d'ordre 2 pour la distribution des gains et pertes. L'approche de Stahl est conceptuellement intéressante mais elle est cependant trop simpliste au vu de l'avancée des modélisations de la VaR.

De cette recommandation réglementaire d'usage des multiplicateurs, naît le travail de Gurdip Bakshi (University of Maryland) et George Panayotov (Georgetown University). Dans leur article *Intra-period Risk, Jump Risk and the Basel Multipliers* (2007) qui a fait l'objet de notre étude, ces derniers s'interrogent premièrement sur la possibilité de recourir à des mesures de risque basées sur des probabilités de passage en dessous d'un seuil, prenant ainsi en compte le risque intra-période. Deuxièmement, ils s'interrogent sur la consistance des multiplicateurs avec des modèles avancés incorporant des sauts dans les trajectoires des prix des actifs. L'importance relative des deux types de risque (*intra-period risk* et *jump risk*) est ensuite examinée, et pour finir Panayotov et Bakshi se demandent si les hypothèses réalistes de risque *intra-period risk* et *jump risk* peuvent justifier les multiplicateurs recommandés.

2 Méthodologie de l'étude

L'idée générale de Gurdip Bakshi et George Panayotov est d'estimer des mesures de risque dans des modèles à sauts reflétant à la fois le *intra-period risk* et le *jump risk*. Ces nouvelles mesures de risque sont ensuite comparées à la VaR standard, c'est à dire celle estimée dans un modèle avec des rentabilités gaussiennes. Une sous-estimation relativement grande du risque avec le modèle à rentabilités de prix gaussiennes (le modèle usuel donc) peut amener à soutenir l'usage des multiplicateurs réglementaires. Par contre une petite sous-estimation du risque par le modèle usuel indiquerait que les multiplicateurs sont trop prudents, et ainsi, les institutions financières mettraient de côté plus de capitaux que nécessaire à cause d'un modèle inadapté.

Pour prendre en compte le risque de saut dans la trajectoire des prix des actifs, leurs rentabilités sont modélisées par des processus de Lévy non-gaussiens, chacun d'entre eux ayant des sauts négatifs. La distribution des rentabilités pour chacun des modèles à saut considérés présente une queue plus épaisse que celle de la loi normale, et peut ainsi générer des VaR plus grandes que la VaR usuelle. 5 modèles différents ont donc été considérés :

- Le modèle de diffusion de sauts de Merton(1976), un modèle brownien Poisson composé comportant des sauts de loi normale.
- Le modèle de Kou-Wang (2003), de même type que le modèle de Merton, mais avec des sauts positifs et négatifs, de loi exponentielles de paramètres différents.

Dans les modèles où le cours de l'actif sous-jacent peut présenter un nombre de sauts infini :

- Le modèle *one-sided pure-jump Finite-Moment Log-Stable model (FMLS)* de Carr et Wu (2003). La queue de la distribution des rentabilités des actifs dans ce modèle est la plus épaisse de toutes celles considérées dans l'article : elle décroît et peut éventuellement s'ajuster à des profils de gains et pertes ayant une *skewness* très élevée.
- Le modèle *two-sided pure-jump* de Carr, Geman, Madan (2002).

Pour chacun de ces modèles prenant en compte le *jump risk*, la VaR est évaluée comme le quantile de la distribution du taux de rentabilité sur une période de 10 jours. Une nouvelle mesure de risque analogue à la VaR, mais prenant en compte le risque intra-période est introduite. Elle est définie comme étant le quantile de la distribution *first-passage* (qu'on explicitera), de passage en dessous d'un seuil fixé, au cours des 10 jours de calcul de la VaR réglementaires. La différence fondamentale avec la VaR usuelle est qu'avec cette mesure, on ne prend plus en compte seulement le risque que la rentabilité passe en dessous d'un seuil entre les dates de début et de fin de période, mais le risque qu'elle dépasse ce seuil à n'importe quel jour de la période. On notera cette mesure VaR-I, comme VaR avec risque **I**ntra-période. Gurdip Bakshi et George Panayotov estiment ensuite la VaR et la VaR-I en ajustant les modèles à sauts présentés ci-dessus à un certain nombre d'actifs portant une grande variété de risques : des risques actions, des risques de taux d'intérêt, des risques de change, des risques liés à la volatilité implicite d'options à la monnaie. Le but étant ici de mettre en évidence le fait que les modèles usuels ne communiquent pas fidèlement le risque inhérent à des produits financiers complexes.

3 Mise en oeuvre

3.1 Probabilités de premier passage et VaR-I

Si on définit la rentabilité du prix d'un actif pas un processus aléatoire $(X_t)_{t\in[0,T]}$, la construction de la VaR-I est basée sur la variable aléatoire :

$$T_{y_\phi} := inf\,\{t > 0 : X_t < y_\phi\}$$

, où $y_\phi < X_0$ est la borne inférieure de rentabilité fixée, à ne pas dépasser. T_{y_ϕ} définit l'instant de premier passage du processus de rentabilité de prix $(X_t)_{t\in[0,T]}$ en dessous du seuil y_ϕ. Ayant défini T_{y_ϕ}, on peut également définir :

$$f[y_\phi, T] := \mathbb{P}(T_{y_\phi} > T) = \mathbb{P}(inf_{s\in[0,T]}X_s > y_\phi)$$

, la probabilité que le premier passage du processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ne survienne pas dans l'intervalle de dates $[0, T]$. Par suite, si on discrétise $[0, T]$ en jours, que l'on pose :

$$f[y_\phi, t] = \phi$$

et

$$T = 10$$

, alors y_ϕ est la VaR-I à 10 jours de niveau de confiance ϕ. C'est le quantile d'ordre $1 - \phi$ de la distribution de la variable aléatoire $\underline{X}_T := inf_{s\in[0,T]}X_s$. Dès lors, un problème se pose : Celui de l'inversion de la fonction de répartition de $\underline{X}_T$. L'approche de Panayotov et Bakshi pour le résoudre est basée sur la résolution d'équations intégro-différentielles (PIDE).

3.2 Equations intégro-différentielles PIDE

Sous la probabilité risque-neutre et pour une période de 10 jours, on considère que la rentabilité espérée des titres vaut zéro. On définit l'espérance conditionnelle pour $t \leq T$ de l'évènement : "le cours de l'action touche le niveau bas $H < S_0$ dans l'intervalle de temps $[0, T]$" par :

$$G[S, t, T] = \mathbb{E}\big[1_{S(u)\leq H}, 0 < u < T|\mathcal{F}_t\big]$$

Donc pour tout $u < t$, si $S(u) < H$ alors $G[S,t,T] = 1$ sinon $0 < G[S,t,T] < 1$.

$G[S,t,T]$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma((S(u))_{0\leq u\leq t})$ engendrée par la famille des prix jusqu'au temps t. En effet :

Soient $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[G[S,t,T]|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{S(u)\leq H}, 0 < u < T|\mathcal{F}_t\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{S(u)\leq H}, 0 < u < T|\mathcal{F}_s\right]|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{S(u)\leq H}, 0 < u < T|\mathcal{F}_s\right] \\
&= G[S,s,T]
\end{aligned}$$

On utilise ici la propriété suivante : Pour $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, deux sous-tribus de $\mathcal{F}$:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{H}\right]|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{H}\right]$$

En effet, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ étant une filtration, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

De plus, par l'utilisation du lemme d'Ito appliqué au processus de Lévy unidimensionnel, nous savons que $G[S,t,T]$ est solution de l'équation intégro-différentielle avec conditions limites suivantes :

$$\begin{cases}
G_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S G_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 G_{SS} + \int_{-\infty}^{+\infty} \big(G[Se^x,t,T] - G[S,t,T] - SG_S[S,t,T](e^x-1)\big)k[x]dx = 0(1) \\
G[S,T,T] = 0 \quad si \quad S(u) \geq H, \quad \forall u \\
G[S,t,T] = 1 \quad si \quad S(u) < H, \quad u < t
\end{cases}$$

Posons $s = ln(S)$, $t = T - t$ et $g[s,t] = G[S,t,T]$, (1) devient en dérivant la fonction composée G :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &= \quad g_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S \frac{1}{S} g_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} g_{ss} \\
&+ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \big(G[e^s e^x,t,T] - G[S,t,T] - SG_S[S,t,T](e^x-1)\big)k[x]dx = 0 \\
&= \quad g_t - \frac{1}{2}\sigma^2 g_s + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{ss} \\
&+ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \big(g[ln(e^{s+x}),t,T] - g[s,t] - S\frac{1}{S}g_s[s,t](e^x-1)\big)k[x]dx = 0
\end{aligned}$$

Le système se reécrit de la manière suivante en effectuant ces changements :

$$\begin{cases}
g_t - \frac{1}{2}\sigma^2 g_s + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{ss} + \int_{-\infty}^{+\infty} \big(g[s+x,t] - g[s,t] - g_s[s,t](e^x-1)\big)k[x]dx = 0 \\
g[s,0] = 0 \quad si \quad s(u) \geq ln(H), \forall u \quad (t := T - t) \\
g[s,t] = 1 \quad si \quad s(u) < ln(H), \quad u < t
\end{cases}$$

Ces équations sont donc résolues en prenant comme mesure $k[x]$ la mesure des sauts dans le modèle de Merton, le modèle de Carr Geman Madan Yor (*CGMY*) et le modèle de Wu et Carr (*Finite Moment Log-Stable*). En plus du modèle de Kou Wang et du modèle CMYD (*One sided Jump Model with Diffusion*), les auteurs considèrent en tout 5 modèles pour évaluer les probabilités de premier passage. La description de ces modèles fait l'objet de la section suivante.

3.3 Modèles pour les rentabilités des actifs et principe de calcul des probabilités de passage

3.3.1 Le modèle de diffusion de Merton

Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ le processus de prix de l'actif considéré. Merton proposa en 1976 le modèle suivant pour les log-rentabilités $(X_t)_{t\geq 0}$ de cet actif :

$$dX_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t$$

où $\sigma \in \mathbb{R}^+$ est le coefficient de diffusion de la volatilité des rentabilités, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique, et $(J_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Les sauts du processus $(J_t)_{t\geq 0}$ sont de loi normale de moyenne μ_J et de variance σ_J^2. Ainsi :

$$\forall t \geq 0, J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

, avec

$$\forall i \geq 0, Z_i \overset{loi}{=} Z \overset{loi}{=} \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$$

, de densité :

$$k\,[x] = \frac{1}{\sigma_J\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-\mu_J)^2}{\sigma_J^2}), \mu_J \in \mathbb{R}, \sigma_J^2 \in \mathbb{R}+$$

$(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson dont les durées inter-occurences sont de loi Exp(λ). Ainsi, d'après les propriétés du processus de Poisson :

$$N_t \overset{loi}{=} Poisson(\lambda t)$$

Pour avoir une forme explicite de X_t pour tout $t \geq 0$, il suffit d'écrire :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t J_s ds$$

D'où pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \mu t + \sigma W_t + J_t \\ &= X_0 + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \end{aligned}$$

X_t est donc un mouvement brownien-Poisson arithmétique, avec $(W_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$, $(Z_i)_{i\geq 0}$ indépendants, et les $(Z_i)_{i\geq 0}$ de même loi.

Pour avoir une forme explicite de S_t, pour tout $t \geq 0$, on pose $\varphi(S_t) = log(S_t)$. On a d'après la formule d'Itô :

$$
\begin{aligned}
d\varphi(S_t) &= \varphi_S^{'}(S_t)dS_t + \frac{1}{2}\varphi_{SS}^{''}(S_t)(dS_t)^2 \\
&= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2 \\
&= (\mu dt + \sigma dW_t + dJ_t) - \frac{1}{2}(\mu dt + \sigma dW_t + dJ_t)^2 \\
&= \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t - \frac{1}{2}(\sigma^2 dt + 0) \\
&= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t + dJ_t
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\varphi(S_t) = log(S_t) &= log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t dJ_s \\
&= log(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + J_t
\end{aligned}
$$

et par suite en passant à l'exponentielle, il vient :

$$
\begin{aligned}
S_t &= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + J_t) \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i) \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} log(1 + V_i)) \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + log\left\{\prod_{i=1}^{N_t}(1 + V_i)\right\}) \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)\prod_{i=1}^{N_t}(1 + V_i)
\end{aligned}
$$

Où : $\forall i \geq 0$, $V_i = e^{Z_i} - 1$. Et Z_i a pour densité :

$$
k\left[x\right] = \frac{1}{\sigma_J\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2}), \mu_J \in \mathbb{R}, \sigma_J^2 \in \mathbb{R}+
$$

$(S_t)_{t\geq 0}$ est donc un processus mixte brownien-Poisson géométrique.

Sous la probabilité historique et pour des intervalles de temps assez courts (par exemple 10 jours), on admet que la rentabilité espérée est égale à 0. Ainsi :

$$
\mu = -\frac{\sigma^2}{2} - \lambda exp(\mu_J + \frac{\sigma^2}{2})
$$

(Noter la différence entre μ et μ_J, σ et σ_J)

La fonction caractéristique de X_t est donnée par :

$$\varphi_{X_t}[u] := \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right]$$

, pour $X_0 = 0$

Ainsi, puisque $(W_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_i)_{i\geq 0}$ sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] &= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t))\right]\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right]\end{aligned}$$

Or $\mu t + \sigma W_t \overset{loi}{=} \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Donc :

$$\mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t))\right] = exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t)$$

Par ailleurs, pour f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))\right] = exp(\int_{\mathbb{R}}(e^{iuf(x)} - 1)\lambda t k[x]\,dx)$$

Car :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))|N_t\right]\right] \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))|N_t = x\right]\mathbb{P}(N_t = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{x} f(Z_i))|N_t = x\right]\mathbb{P}(N_t = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{x} f(Z_i))\right]\mathbb{P}(N_t = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{x}\mathbb{E}\left[exp(iuf(Z_i))\right]\mathbb{P}(N_t = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[exp(iuf(Z))\right]^x\mathbb{P}(N_t = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[exp(iuf(Z))\right]^x e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t \mathbb{E}\left[exp(iuf(Z))\right])^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda t} exp(\lambda t \mathbb{E}\left[exp(iuf(Z))\right]) \\
&= exp(\lambda t (\mathbb{E}\left[exp(iuf(Z))\right] - 1)) \\
&= exp(\lambda t (\mathbb{E}\left[exp(iuf(Z)) - 1\right])) \\
&= exp(\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iuf(x)} - 1) k\left[x\right] dx) \\
&= exp(\int_{\mathbb{R}} (e^{iuf(x)} - 1) \lambda t k\left[x\right] dx)
\end{aligned}
$$

On utilise ici notamment le fait que $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_i)_{i \geq 0}$ sont indépendants, et les $(Z_i)_{i \geq 0}$ sont de même loi.

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] &= exp(\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \lambda t k\left[x\right] dx) \\
&= exp(\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) k\left[x\right] dx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= exp(\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2}) dx) \\
&= exp(\lambda t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi}} \left[exp(iux - \frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2}) - exp(-\frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2})\right] dx \\
&= exp(\lambda t \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi}} exp(iux) exp(-\frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2}) dx - 1\right] \\
&= exp(\lambda t \left[\mathbb{E}\left[e^{iuZ}\right] - 1\right] \\
&= exp(\lambda t (exp(iu\mu_J - \frac{u^2 \sigma_J^2}{2}) - 1))
\end{aligned}
$$

On conclut donc que dans le cadre du modèle de Merton, la fonction de répartition des rentabilités géométriques X_t est :

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X_t}\left[u\right] = \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] &= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t))\right] \mathbb{E}\left[exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] \\
&= exp(iu\mu t - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 t) exp(\lambda t (exp(iu\mu_J - \frac{u^2 \sigma_J^2}{2}) - 1)) \\
&= exp(iu\mu t - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 t + \lambda t (exp(iu\mu_J - \frac{u^2 \sigma_J^2}{2}) - 1))
\end{aligned}
$$

Puisque le nombre de sauts dans ce modèle est fini, l'équation intégro-différentielle peut être simplifiée. Elle devient alors :

$$
g_t - \mu g_s - \frac{1}{2} \sigma^2 g_{ss} + \lambda g - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g[s + x, t] k[x] dx = 0
$$

avec la condition initiale :

$$g[s,0] = 0 \quad si \quad s(u) \geq ln(H), \quad \forall \quad u$$

$$g[s,t] = 1 \quad si \quad s(u) < ln(H), \quad u < t$$

Le calcul des probabilités de premier passage est effectué en utilisant l'approche de *Feng et Linetsky (2006)*. Cette approche utilise un schéma implicite-explicite avec extrapolation du pas de temps. De plus elle est robuste, car elle s'accomode bien de la singularité dans la condition initiale au niveau de premier passage.

3.3.2 Modèle double exponentiel à sauts

Ce modèle ressemble au modèle de Merton pour la caractérisation de ses sauts. Il a été étudié par *Kou* et *Wang* (2003). Le processus des rentabilités suit la même équation différentielle stochastique que celui de *Merton*. La différence réside dans la distribution des sauts, définie par la densité :

$$k[x] = \wp\eta_+ exp(-\eta_+ x)1_{x\geq 0} + (1-\wp)\eta_- exp(\eta_- x)1_{x<0}$$

, avec $\eta_+, \eta_- \in \mathbb{R}^+, \wp \in [0,1]$.

Dans ce modèle, $\wp$ représente la probabilité d'avoir un saut “vers le haut" et $1/\eta_+$ est la moyenne d'amplitude du saut de distribution exponentielle “vers le haut". Nous raisonnons par analogie pour η_-, représentant cette fois un saut “vers le bas".

En supposant une fois de plus que la rentabilité du titre est nulle pour des périodes courtes, le drift pour ce modèle vaut

$$\mu = -\frac{\sigma^2}{2} - \lambda\left(\frac{\wp}{1-\eta_+} + \frac{1-\wp}{\eta_- + 1}\right)$$

, où λ l'intensité du processus de Poisson composé.

Nous pouvons également retrouver l'expression de la fonction caractéristique des log-rentabilités X_t. Pour cela, nous procédons comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}[u] = E[e^{iuX_t}] &= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sigma W_t))\right]\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] \\
&= exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t)exp(\lambda t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)k\left[x\right]dx)
\end{aligned}$$

, puisque $(W_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_i)_{i\geq 0}$ sont indépendants, et $\mu t + \sigma W_t \overset{loi}{=} \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}[u] &= exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + \lambda t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)k\left[x\right]dx) \\
&= exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + \lambda t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)(\wp\eta_+ exp(-\eta_+ x)1_{x\geq 0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (1-\wp)\eta_- exp(\eta_- x)1_{x<0})dx) \\
&= \quad exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + \lambda t(\int_{\mathbb{R}} e^{iux}(\wp\eta_+ exp(-\eta_+ x)1_{x\geq 0} \\
&+ \quad (1-\wp)\eta_- exp(\eta_- x)1_{x<0})dx - 1)) \\
&= \quad exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + \lambda t(\int_{\mathbb{R}} \wp\eta_+ e^{iux} exp(-\eta_+ x)1_{x\geq 0}dx \\
&+ \quad \int_{\mathbb{R}}(1-\wp)\eta_- e^{iux} exp(\eta_- x)1_{x<0}dx - 1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + \lambda t(\wp\eta_+ \int_0^{\infty} exp((iu-\eta_+)x)dx \\
&+ \quad (1-\wp)\eta_- \int_{-\infty}^{0} exp((iu+\eta_-)x)dx - 1)) \\
&= \quad exp\Big(iu\mu t - \frac{u^2\sigma^2 t}{2} + \lambda t\big(\frac{\wp\eta_+}{\eta_+ - iu} + \frac{(1-\wp)\eta_-}{\eta_- + iu} - 1\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Au final on a donc :

$$
\varphi_{X_t}[u] = E[e^{iuX_t}] = exp\Big(iu\mu t - \frac{u^2\sigma^2 t}{2} + \lambda t\big(\frac{\wp\eta_+}{\eta_+ - iu} + \frac{(1-\wp)\eta_-}{\eta_- + iu} - 1\big)\Big)
$$

Nous pouvons calculer comme précédemment la probabilité de premier passage en dessous de la barrière basse à l'aide d'une équation intégro-différentielle mais l'avantage de ce modèle réside dans le fait que la transformée de Laplace du premier passage à un niveau fixé se calcule analytiquement.
D'après *Kou et Wang (2003)*, cette transformée de Laplace du temps de premier passage à un niveau b fixé (pour le processus double exponentiel à sauts issu de 0), est donnée pour tout $\nu > 0$ par :

$$
E[exp(-\nu\tau_b)] = \big(\frac{\eta_+ - \gamma_{1,\nu}}{\eta_+}\big)\big(\frac{\gamma_{2,\nu}}{\gamma_{2,\nu} - \gamma_{1,\nu}}\big)exp(-b\gamma_{1,\nu}) + \big(\frac{\gamma_{2,\nu} - \eta_+}{\eta_+}\big)\big(\frac{\gamma_{1,\nu}}{\gamma_{2,\nu} - \gamma_{1,\nu}}\big)exp(-b\gamma_{2,\nu})
$$

où $\gamma_{1,\nu}$ et $\gamma_{2,\nu}$ sont les deux racines positives de l'équation de *Cramer-Linderg* :

$$
\mu x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \lambda\big(\frac{\wp\eta_+}{\eta_+ - x} + \frac{(1-\wp)\eta_-}{\eta_- + x} - 1\big) = \nu
$$

, $0 < \gamma_{1,\nu} < \eta_+ < \gamma_{2,\nu} < \infty$

Cette expression de la transformée de Laplace peut être utile pour retrouver $\mathbb{P}(\tau_b < t)$ par inversion numérique. En effet, si on note f_{τ_b} et F_{τ_b} respectivement la densité et la fonction de répartition de τ_b, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\nu}\mathbb{E}\left[exp(-\nu\tau_b)\right] &= \frac{1}{\nu}\int_0^{\infty} exp(-\nu t) f_{\tau_b}(t)dt \\
&= \frac{1}{\nu}\left\{exp(-\nu t)F_{\tau_b}(t)|_{t=0}^{t=\infty} + \nu\int_0^{\infty} exp(-\nu t)F\tau_b(t)dt\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\nu}\left\{0+\nu\int_0^\infty exp(-\nu t)F\tau_b(t)dt\right\} \\
&= \int_0^\infty exp(-\nu t)F\tau_b(t)dt \\
&= \int_0^\infty exp(-\nu t)\mathbb{P}(\tau_b<t)dt
\end{aligned}
$$

Pour trouver $\mathbb{P}(\tau_b < t)$, il suffit donc de trouver la transformée de Laplace inverse de

$$\frac{1}{\nu}\left\{\mathbb{E}\left[exp(-\nu\tau_b)\right] = \frac{1}{\nu}(\frac{\eta_+ - \gamma_{1,\nu}}{\eta_+})(\frac{\gamma_{2,\nu}}{\gamma_{2,\nu}-\gamma_{1,\nu}})exp(-b\gamma_{1,\nu}) + (\frac{\gamma_{2,\nu}-\eta_+}{\eta_+})(\frac{\gamma_{1,\nu}}{\gamma_{2,\nu}-\gamma_{1,\nu}})exp(-b\gamma_{2,\nu})\right\}$$

Kou et *Wang* suggèrent pour effectuer cette inversion d'utiliser l'algorithme de *Gaver-Stehfest*. Le principe de l'algorithme de *Gaver-Stehfest* est le suivant :

Etant donnée $\hat{f}$ la transformée de Laplace d'une fonction f (l'original). L'original peut-être vu comme la limite en $+\infty$ de la suite de fonction $\widetilde{f_n(t)}$ définie par :

$$\widetilde{f_n[t]} = \frac{ln(2)}{t}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \hat{f}((n+k)\frac{ln(2)}{t})$$

On a donc :

$$\forall t, f[t] = lim_{n\to\infty}\widetilde{f_n[t]}$$

Pour accélérer la convergence de la suite $\widetilde{f_n[t]}$ vers $f[t]$, on peut utiliser l'extrapolation de Richardson. D'après cette méthode, $f[t]$ est approchée pour t et n assez grands par :

$$f_n^*[t] = \sum_{k=1}^{n} w[k,n]\widetilde{f_k[t]}$$

où

$$w[k,n] = (-1)^{n-k}\frac{k^n}{k!(n-k)!}$$

3.3.3 Exponentially dampened power law model (CGMY)

Ce modèle a été étudié par *Carr*, *Geman*, *Madan* et *Yor* (2002), d'où le nom de processus CGMY. Ce processus n'a aucune composante de diffusion et la densité des sauts est définie par :

$$k_X[x] = \delta\frac{exp(-\beta_-|x|)}{|x|^{1+\alpha}}$$

pour $x < 0$ et

$$k_X[x] = \delta\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}$$

pour $x > 0$, avec $\delta, \beta_+, \beta_- \in \mathbb{R}^+$

Dans ce modèle, δ est le paramètre de fréquence d'occurence des sauts. Les paramètres β_+ et β_- contrôlent la décroissance exponentielle de la probabilité de sauts de différentes tailles. Suivant les valuers de α, le processus peut ou pas être complètement monotone, et peut avoir un nombre de sauts fini ou infini.

L'expression du drift qui garantit une rentabilité espérée nulle est :

$$\mu = -\lambda\Gamma[-\alpha]\big((\beta_+ - 1)^\alpha - \beta_+^\alpha + (\beta_- + 1)^\alpha - \beta_-^\alpha\big)$$

.

Retrouvons maintenant l'expression de la fonction caractéristique des log-rentabilités X_t. Ici, l'absence de composante de diffusion signifie $\sigma = 0$, soit pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = \mu t + J_t$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}[u] = \mathbb{E}[e^{iuX_t}] &= \mathbb{E}\left[exp(iu(\mu t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[exp(iu\mu t)\right]\mathbb{E}\left[exp(iu\sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] \\
&= exp(iu\mu t)exp(\lambda t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)k\left[x\right]dx) \\
&= exp(iu\mu t + \lambda t(\int_{-\infty}^{0}(e^{iux}-1)\delta\frac{exp(-\beta_-|x|)}{|x|^{1+\alpha}}dx \\
&+ \int_0^{+\infty}(e^{iux}-1)\delta\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx)) \\
&= exp(iu\mu t + \lambda t(\frac{\delta}{(-1)^{1+\alpha}}\int_{-\infty}^{0}(e^{iux}-1)\frac{exp(\beta_- x)}{x^{1+\alpha}}dx \\
&+ \delta\int_0^{+\infty}(e^{iux}-1)\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx)) \\
&= exp(iu\mu t + \lambda\delta t(\int_0^{+\infty}(e^{iuv}-1)\frac{exp(-\beta_- v)}{v^{1+\alpha}}dv \\
&+ \int_0^{+\infty}(e^{iux}-1)\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= exp(iu\mu t + \lambda\delta t(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_-^{-\alpha}}(\int_0^{+\infty} e^{-iux}\frac{\beta_-^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_- x)}{x^{1+\alpha}}dx \\
&- \int_0^{+\infty}\frac{\beta_-^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_- x)}{x^{1+\alpha}}dx) + \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}}(\int_0^{+\infty} e^{iux}\frac{\beta_+^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx \\
&- \int_0^{+\infty}\frac{\beta_+^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx))) \\
&= exp(iu\mu t + \lambda\delta t(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_-^{-\alpha}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-iux}\frac{\beta_-^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_- x)}{x^{1+\alpha}}dx - 1\right] \\
&+ \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}}\left[\int_0^{+\infty} e^{iux}\frac{\beta_+^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}dx - 1\right]))
\end{aligned}$$

On reconnaît les densités et les transformées de Laplace des lois Gamma$(\beta_+, -\alpha)$ et Gamma$(\beta_-, -\alpha)$. Les transformées de Laplace valent respectivement :

$$(1 + \frac{iu}{\beta_-})^\alpha = (\frac{\beta_- + iu}{\beta_-})^\alpha = \frac{(\beta_- + iu)^\alpha}{\beta_-^\alpha}$$

et

$$(1 - \frac{iu}{\beta_+})^\alpha = (\frac{\beta_+ - iu}{\beta_-})^\alpha = \frac{(\beta_+ - iu)^\alpha}{\beta_+^\alpha}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}[u] &= exp(iu\mu t + \lambda\delta t(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_-^{-\alpha}}\frac{(\beta_- + iu)^\alpha}{\beta_-^\alpha} - \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_-^{-\alpha}} + \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}}\frac{(\beta_+ - iu)^\alpha}{\beta_+^\alpha} - \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}})) \\
&= exp(iu\mu t + \lambda\delta t\Gamma(-\alpha)\left[(\beta_- + iu)^\alpha - \beta_-^\alpha + (\beta_+ - iu)^\alpha - \beta_+^\alpha\right])
\end{aligned}$$

Au final nous obtenons :

$$\varphi_{X_t}[u] = \mathbb{E}[e^{iuX_t}] = exp\Big(iu\mu t + t\lambda\Gamma[-\alpha]\big((\beta_+ - iu)^\alpha - \beta_+^\alpha + (\beta_- + iu)^\alpha - \beta_-^\alpha\big)\Big)$$

L'équation intégro-différentielle permettant de calculer les probabilités de premier passage est la suivante :

$$g_t + \lambda\int_{-\infty}^{0}(g[s+x,t] - g[s,t] - g_s[s,t](e^x - 1))\frac{e^{-\beta_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}}dx + \lambda\int_{0}^{+\infty}(g[s+x,t] - g[s,t] - g_s[s,t](e^x - 1))\frac{e^{-\beta_+|x|}}{x^{1+\alpha}}dx = 0$$

Dans la pratique, on considère $\alpha > 0$ dans ce modèle. Le modèle a ainsi un nombre de sauts infinis. Pour résoudre numériquement l'équation intégro-différentielle, on utilise l'approche de *Hirsa* et *Madan (2003)*. On réécrit la somme des deux intégrales précedentes notée I, comme la somme de six intégrales $I_1, \ldots, I_6$. Soit

$$I \approx I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

où

$$I_1 = \lambda\int_{-\infty}^{log(H)-s}(1 - g[s] + g_s[s])\frac{e^{-\beta_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}}dx,$$

$$I_2 = \lambda\int_{log(H)-s}^{-\Delta}(g[s+x] - g[s] - g_s[s])\frac{e^{-\beta_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}}dx,$$

$$I_3 = -\lambda\int_{-\infty}^{-\Delta} g_s[s]e^x\frac{e^{-\beta_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}}dx,$$

$$I_4 = \lambda\int_{-\Delta}^{0}(g[s] + g_s[s]x + \frac{1}{2}g_{ss}x^2 - g[s] - g_s[s](1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 1))\frac{e^{-\beta_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}}dx,$$

$$I_5 = \lambda\int_{0}^{\Delta}(g[s] + g_s[s]x + \frac{1}{2}g_{ss}x^2 - g[s] - g_s[s](1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 1))\frac{e^{-\beta_+|x|}}{x^{1+\alpha}}dx,$$

$$I_6 = \int(g[s+x] - g[s] - g_s[s](e^x - 1))\frac{e^{-\beta_+|x|}}{x^{1+\alpha}}dx$$

On résoud cette équation intégro-différentielle en utilisant un schéma aux différences finies explicite.

3.3.4 One sided jump model with diffusion

Le modèle CMYD est un cas particulier du processus CGMY avec une composante de diffusion et des sauts ne pouvant se faire que dans une direction (“vers le haut" ou “vers le bas").
Il s'écrit concrètement

$$X_t = \sigma W_t - Z_t$$

, avec $(W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien standard, σ la volatilité et une composante de sauts "positifs" $(Z_t)_{t\geq 0}$. On suppose que :

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

, où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ. La densité des sauts $(Y_i)_{i\geq 0}$ de Z_t étant :

$$k[x] = \delta \frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}}, \text{ où } x > 0,\ \delta,\ \beta_+ \in \mathbb{R}^+,\ \alpha \in (0,2).$$

La transformée de Laplace de X_t est donnée par :

$$\varphi_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = exp(iu\mu t + t\lambda\Gamma[-\alpha]((\beta_+ - iu)^\alpha - \beta_+^\alpha) - \frac{\sigma^2 u^2 t}{2})$$

En effet, supposons W_t et Z_t indépendants (ce qui ne semble pas incohérent) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu(\sigma W_t - Z_t)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu\sigma W_t}\right]\mathbb{E}\left[e^{-iuZ_t)}\right] \\
&= exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t)\mathbb{E}\left[e^{-iu\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right]
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-iu\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right] &= exp(\int_{\mathbb{R}} (e^{-iux} - 1)\lambda t k\,[x]\,dx) \\
&= exp(\int_0^{+\infty} (e^{-iux} - 1)\lambda t\delta \frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}} dx) \\
&= exp(\lambda t\delta \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}} \int_0^{+\infty} (e^{-iux} - 1)\frac{\beta_+^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{exp(-\beta_+ x)}{x^{1+\alpha}} dx) \\
&= exp(\lambda t\delta \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}} \left[(1 + \frac{iu}{\beta_+})^\alpha - 1\right]) \\
&= exp(\lambda t\delta \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}} \left[\frac{(\beta_+ + iu)^\alpha}{\beta_+^\alpha} - 1\right]) \\
&= exp(\lambda t\delta \frac{\Gamma(-\alpha)}{\beta_+^{-\alpha}} \left[\frac{(\beta_+ + iu)^\alpha - \beta_+^\alpha}{\beta_+^\alpha}\right]) \\
&= exp(\lambda t\delta\Gamma(-\alpha)\left[(\beta_+ + iu)^\alpha - \beta_+^\alpha\right])
\end{aligned}$$

Il vient

$$\varphi_{X_t}(u) = exp(\lambda t\delta\Gamma(-\alpha)\left[(\beta_+ + iu)^\alpha - \beta_+^\alpha\right] - \frac{1}{2}\sigma^2u^2t)$$

avec $\mu = -\lambda\Gamma(-\alpha)\left\{(\beta_+ - 1)^\alpha - \beta_+^\alpha\right\} - \frac{1}{2}\sigma^2 t$.

D'après *Rogers (2000)*, pour calculer la probabilité de premier passage, on utilise l'approche suivante :

On note $f[t,x]$ la probabilité que le processus X_t, ne comportant que des sauts "négatifs" et vérifiant $X_0 = 0$, ne passe pas en dessous du niveau $x < 0$ entre les dates 0 et t. La transformée de Laplace de $f[t,x]$ par rapport aux deux variables t et x est :

$$\tilde{f}[t,x] := \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi t - zx} f[t,x]dtdx = \frac{\zeta^*[\varphi] - z}{(\varphi - \psi[z])\zeta^*[\varphi]z}$$

, où $\psi[z]$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left[exp(z)\right] = exp(t\psi[z])$$

et $\zeta^*[\varphi]$ est solution :

$$\psi[\zeta[\varphi]] = \varphi$$

La probabilité de premier passage $f[t,x]$ peut-être retrouvée par inversion de la transformée de Laplace.

Après avoir étudié le principe de calcul de la VaR-I et présenté les différents modèles de rentabilité, nous allons présenter brièvement les outils de statistique utilisés pour aboutir aux résultats. En général, quand on dispose de données observés sur quelques périodes, on se demande d'abord à partir d'outils de statistique descriptive quel modèle vraisemblable ajuster à ces données. Après avoir choisi un ou plusieurs modèles, on applique des tests d'adéquation pour n'en conserver qu'un, dont on estime les paramètres. Ici, les paramètres de lois de chacun des 5 modèles sont estimés par une méthode de maximum de vraisemblance basée sur les fonctions caractéristiques. Des tests d'adéquation et de comparaison des modèles sont ensuite mis en oeuvre.

3.4 Estimation par maximum de vraisemblance

Etant donné qu'il existe rarement une forme analytique fermée pour les fonctions de densité dans les modèles de Lévy, l'estimation directe à partir de la densité n'est pas applicable. Cependant, le théorème de Lévy-Khinchtine nous assure que les processus de Lévy sont entièrement caractérisés par leur fonction caractéristique, ce qui permet de réliser l'estimation à partir de celles-ci. En effet, la fonction caractéristique contient la même information que la fonction de vraisemblance, et elle permet également de calculer les moments de différents ordres.

Prenons un processus de Lévy de vecteur de paramètres θ. La log-vraisemblance des rentabilités X_t aux temps $\{t = 1, 2, .., T\}$ est calculée en interpolant le densité des rentabilités :

$$\Phi[X_k; \theta] : k = 1, 2, \ldots, N$$

N est le nombre de points de la grille lors de l'inversion **Fast Fourier** de la fonction caractéristique. Par exemple, dans le cas où nous avons pour données des rentabilités hebdomadaires (l'intervalle de temps vaut $\Delta = 1/52$), l'expression de la densité des rentabilités obtenue par l'inversion de la fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi[X_k;\theta] = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N} Re\Big[e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)}e^{\frac{1}{2}iNh(j-1)l}\phi_{X_\Delta}[(j-1)l;\theta] \times \frac{l}{3}(3+(-1)^j - \delta_{j-1})\Big]$$

avec :

- $\varphi_{X_\Delta}[u;\theta]$ la fonction caractéristique des rentabilités X_Δ ;
- h le pas de la grille de calcul de la fonction caractéristique ;
- l le pas de la grille qui permet d'obtenir la densité des rentabilités ;
- N le nombre de points de la grille lors de l'inversion **Fast Fourier** ;
- δ_{j-1} est la fonction de Kronecker, qui vaut 1 pour $j = 1$ et 0 partout ailleurs.

Nous pouvons également calculer l'écart-type grâce à la matrice hessienne H donnée par par la dérivée seconde de la fonction de vraisemblance évaluée au paramètre optimal trouvé lors de la maximisation. Cet écart-type vaut $\sqrt{diag(-H^{-1})}$.

3.5 Modélisation des séries et tests d'adéquation

Comme dans Li, Wells, Wu (2007), pour vérifier l'ajustement des modèles aux données, Panayotov et Bakshi utilisent le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov. D'après ces derniers, l'avantage de ce test est que la distribution de la statistique de test ne dépend pas de la fonction de répartition qu'on teste. De plus c'est un test exact, dont la validité ne dépend pas d'une taille d'échantillon optimale.

Pour T observations $X_t, t = 1, \ldots, T$, la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov est :

$$D = max_{1\leq t\leq T}(F[X_t] - \frac{t}{T}, \frac{t}{T} - F[X_t])$$

où $F[X_t]$ est la fonction de répartition évaluée en X_t sous le modèle testé.

Pour trancher entre deux modèles vraisemblables Panayotov et Bakshi utilisent le test de Vuong (1989) dont la statistique est :

$$\frac{\mathcal{L}_1[\theta_1] - \mathcal{L}_2[\theta_2] - (ln(T)/2)(n_1 - n_2)}{\sqrt{T}\omega_{1,2}}$$

où

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(ln\frac{\phi_1[X_t;\theta_1]}{\phi_2[X_t;\theta_2]})^2 - (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} ln\frac{\phi_1[X_t;\theta_1]}{\phi_2[X_t;\theta_2]})^2$$

Le numérateur de la statistique de test est corrigé suivant le critère bayésien de Schwarz avec $n_1 = dim[\theta_1]$ et $n_2 = dim[\theta_2]$. La statistique de test est asymptotiquement gaussienne standard et ainsi, le modèle 1 domine le modèle 2 si avec un niveau de confiance de 5% si la statistique de test est supérieure à 1.65, ou avec un niveau de confiance de 1% si la statistique de test excède 2.32

4 Résultats et développements

Le but de Panayotov et Bakshi était de proposer des mesures de risques moins simplistes que la VaR, tenant en particulier compte du risque de saut dans la trajectoire des prix des actifs considérés ; et du risque de négliger certaines données importantes quand la rentabilté est calculée sur la base de dates relativement éloignées.

Le premier résultat majeur obtenu est que les nouvelles mesures de risque incorporant le *jump risk* et le *intra-period risk* sont systématiquement supérieures à la VaR Normale (dans un modèle à rentabilités gaussiennes), et peuvent être jusqu'à 2.64 fois plus grandes. Le plus grand écart avec la VaR Normale est observé pour les actifs dérivés d'actions, dont on évalue la volatilité implicite. Cette observation est conforme à la suspiscion des régulateurs quant à la capacité de la VaR Normale à capturer de façon adéquate le risque inhérent aux instruments complexes. Ensuite, l'importance relative du *jump risk* et du *intra-period risk* varie selon les modèles et le type d'actif choisi. Pour les dérivés actions et pour les taux de change, l'influence des deux risques est équivalente. Troisièmement, de tous les modèles à sauts considérés pour modéliser la rentabilité des actifs, le modèle FMLS de Carr et Wu (2003) génère les multiplicateurs les plus grands indépendamment du type d'actif choisi. Enfin, le fait de combiner risque de saut et risque intra-période peut dans une certaine mesure justifier l'usage des multiplicateurs réglementaires, mais on ne dispose pas pour l'instant de valeurs assez optimales entre 3 et 4 pour ces multiplicateurs.

Une extension de cet article pourrait être de considérer des modèles à volatilité stochastique, ce qui le rapprocherait encore plus de la réalité. Par ailleurs, il existe des mesures alternatives à la VaR, ne présentant pas les mêmes défauts mais qui ne sont que peu ou pas utilisées. On pourrait éventuellement considérer la Tail Value at Risk, qui elle donne une meilleure information sur la queue de la distribution :

$$\forall 0 \leq \alpha < 1, TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)du$$

La mesure TVaR peut être vue comme une moyenne arithmétique des mesures $VaR_u(X)$ pour des valeurs de u supérieures à α. On pourrait donc par exemple évaluer la Tail Value at Risk dans un modèle à saut à volatilité stochastique, et la comparer à la VaR Normale. Evidemment cela devient beaucoup plus compliqué.

5 Bibliographie

- Articles

Feng, Linetsky, "Pricing Options in Jump-Diffusion Models and Extrapolation" (2006) Peter Tankov, Ekaterina Voltchkova, "Jump-diffusion models : a practitioner's guide" Hélyette Geman, "Pure Jump Lévy Processes for Asset Price Modelling" (2002) Carr, Geman, Madan, Yor "The Fine Structure of Asset Returns : An Empirical Investigation" (2002)

- Livres

Rama Cont, Peter Tankov, *Financial Modelling with Jump processes*, Chapman et Hall/CRC Financial Mathematics Series, Boca Raton 2004

- Liens internet

http://www.math.umn.edu/~bemis/finance/PIDE.pdf
http://faculty.baruch.cuny.edu/lwu/890/CarrMadan99.pdf
http://www.pims.math.ca/industrial/2001/financial/madan-3-9/cgmy3.pdf
http://129.3.20.41/eps/fin/papers/0207/0207015.pdf
http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_de_Fourier_rapide
http://129.3.20.41/eps/fin/papers/0207/0207012.pdf

- Cours

Cours ENSIMAG 2e année, "Calcul stochastique : application à la valorisation et couverture des risques financiers"