ISFA M2R SAF

Projet de Modélisations avancées en Assurance

Evaluation et couverture de garanties plancher sur des Contrats en unité de compte

Thierry Moudiki, Xavier Milhaud

2 juin 2008

Table des matières

1 Introduction

Dans ce document, on se place dans le cadre de la tarification, et plus particulièrement de la couverture d'une garantie plancher en cas de décès sur un contrat en unités de comptes (UC). Ce type de produit est décrit dans le support de cours [Pla08] du M2 recherche ISFA, et il est valorisé par la formule :

$$V = \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1}p_x q_{x+n-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F} \left[e^{-rn} [K - S_n]^+ \right] \tag{1.1}$$

La formule (1.1) désignée assez naturellement par le terme "formule des Puts moyens pondérés" permet de mettre clairement en évidence la structure optionnelle de ce type de contrat.

Après avoir décrit brièvement les garanties plancher en cas de décès sur un contrat en UC, on s'intéressera à la comparaison des coûts de deux méthodes de gestion de couverture de ces produits. La première est une méthode classique de couverture d'une option européenne en présence de coûts de transaction, avec réallocation constante des actifs du portefeuille de réplication, et en prenant comme hypothèse la mutualisation parfaite des décès. La deuxième méthode de couverture consiste à ne modifier l'allocation des actifs que quand la position est défavorable. Nous avons pour cette partie fait une illustration numérique avec `Matlab`. On présentera ensuite la gestion de la couverture dans le cas où on ne suppose plus que les décès sont mutualisables. On proposera enfin une quantification du coût des imperfections de couverture. Nous nous sommes basés pour réaliser ce document sur les références [Pla08], [Merl00] et [Chen03] indiquées en annexe.

2 Contexte de l'étude

On distingue deux types de contrats d'épargne-assurance : les contrats en euros et les contrats en unités de compte. Les contrats en euros offrent à l'assuré à leur échéance une somme fixée à l'avance, à laquelle s'ajoutent les participations aux bénéfices techniques et financiers. Ils peuvent garantir au bénéficiaire un rendement minimum. Les contrats en unités de compte ne permettent pas à l'assuré de toucher un montant fixe en cas de sinistre. Ils lui donnent le droit de souscrire à une certaine quantité d'actifs financiers telles que des actions de SICAV ou des parts de SCI ; la liste des supports admissible pour ce type de contrat est détaillée aux articles L131-1 et R131-1 du Code des Assurances. Dans le bilan de la compagnie d'assurance, les engagements de l'assureur vis-à-vis de l'assuré pour ce type de contrats sont inscrits au passif sous forme de provision mathématique. À l'actif de la compagnie sont inscrites les parts dans lesquelles sont investies les primes de l'assuré. On a une égalité comptable entre la provision mathématique inscrite au passif et les actifs susceptibles d'être souscrits par l'assuré, inscrits à l'actif du bilan. Ceci permet de modéliser l'épargne de l'assuré par le même processus de variation que celui des actifs supports du contrat.

Le risque encouru par l'assuré dans ce type de contrat est lié à la fluctuation des valeurs des actifs supports qu'il peut souscrire. Dans le cadre d'une assurance-vie, si ce dernier décède à un moment ou le cours des actfis supports est très bas, il risque fort de ne même pas pouvoir récupérer les primes qu'il a initialement versées. Une garantie plancher adossée à ce contrat permet de le rendre plus attractif pour l'assuré. Cette garantie assure en effet aux bénéficiaires du contrat en UC qu'ils ne recevront pas moins des primes versées, même si le cours des unités de compte est très bas. En contrepartie, l'assureur récupère une partie du risque financier encouru par l'assuré en l'absence de garantie plancher.

Soit $(S_t)_{t\geq 0}$, le cours de l'actif souscrit dans le contrat d'épargne en UC, égal au montant de l'épargne de l'assuré, et K le cumul des primes investies par l'assuré, nettes des frais de souscription et des rachats éventuels. Si l'assuré décède entre les dates i et $i+1$ (années), $i \in \mathbb{N}$, l'assureur va devoir verser au bénéficiaire au titre du contrat en UC et de la garantie plancher associée, une prestation égale à :

$$S_{i+1} + [K - S_{i+1}]^+$$

On remarque ici notamment que cette prestation :

$$S_{i+1} + [K - S_{i+1}]^+ = max(K, S_{i+1})$$

est minorée par K dans tous les états de la nature. L'assuré ne touchera donc jamais moins de ce qu'il a investi en termes de prime. Par contre un problème se pose pour évaluer ce contrat : l'échéance de ce Put dont il faut couvrir le risque est aléatoire. Elle n'est rien d'autre que la date de décès de l'assuré. Le risque de mortalité associé à la garantie fait qu'on devrait normalement le valoriser et le couvrir en hypothèse de marché incomplet, et pas par arbitrage. On supposera dans un premier temps que le portefeuille de l'assureur contient un grand nombre de contrats pour que le risque de mortalité soit bien mutualisé, et qu'il soit indépendant du risque financier porté par les contrats. On peut par ailleurs aussi souligner comme le font Sylvain Merlus et Olivier Pequeux dans [Merl00] qu'il n'y a pas de "choix" d'exercice dans la garantie. Il n'est donc pas adéquat de valoriser la garantie par des options américaines exerçables à tout moment.

On note $t = 0$ la date de souscription du contrat en UC et de la garantie, et $t = T$ leur date d'échéance. On peut démontrer que dans un marché complet, en absence d'opportunité d'arbitrage, et en faisant l'hypothèse de mutualisation parfaite des décès, le prix de la garantie plancher associée au contrat en UC est :

$$V = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^F}\left[e^{-r(K_x+1)}[K - S_{K_x+1}]^+ \mathbb{1}_{\{T_x \leq T\}}\right]$$

où K_x est la partie entière de la date de décès T_x. Remarquons qu'on a rajouté la condition "l'individu décède avant la date d'échéance du contrat" : $\{T_x \leq T\}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^F}\left[e^{-r(K_x+1)}[K - S_{K_x+1}]^+ \mathbb{1}_{\{T_x \leq T\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[e^{-r(K_x+1)}[K - S_{K_x+1}]^+ \mathbb{1}_{\{T_x \leq T\}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[e^{-r(K_x+1)}[K - S_{K_x+1}]^+ \mathbb{1}_{\{T_x \leq T\}} | K_x\right]\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[e^{-r(K_x+1)}[K - S_{K_x+1}]^+ | K_x = n\right] \mathbb{P}^a(K_x = n)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[\sum_{n=0}^{T-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[e^{-r(n+1)}[K-S_{n+1}]^+|K_x=n\right]\mathbb{P}^a(K_x=n)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[\sum_{n=0}^{T-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[e^{-r(n+1)}[K-S_{n+1}]^+\right]\mathbb{P}^a(K_x=n)\right]
\end{aligned}
$$

On utilise ici pour supprimer le conditionnement le fait que S_{n+1}, le cours de l'actif à la date $n+1$ est indépendant de la date de décès de l'assuré, $K_x=[T_x]$ par hypothèse de mutualisation. On utilise ensuite le théorème de Fubini-Tonelli pour intervertir les deux intégrales $\int d\mathbb{Q}^F(w)$ et $\int d\mathbb{P}^a(w)$:

$$
\begin{aligned}
V &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\sum_{n=0}^{T-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-r(n+1)}[K-S_{n+1}]^+\right]\mathbb{P}^a(K_x=n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{T-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-r(n+1)}[K-S_{n+1}]^+\right]\mathbb{P}^a(K_x=n) \\
&= \sum_{n=1}^{T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]\mathbb{P}^a(K_x=n-1)
\end{aligned}
$$

On a supprimé l'intégrale $\int d\mathbb{P}^a(w)$ car la somme est déterministe. Il vient ensuite :

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{n=1}^{T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]\mathbb{P}^a(n-1\leq T_x<n) \\
&= \sum_{n=1}^{T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]{}_{n-1|1}q_x \\
&= \sum_{n=1}^{T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]{}_{n-1}p_x q_{x+n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{T}{}_{n-1}p_x q_{x+n-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$
\boxed{V=\sum_{n=1}^{T}{}_{n-1}p_x q_{x+n-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]}
$$

On reconnaît en particulier $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]$, l'expression du prix d'une option de vente de prix d'exercice K et de maturité n. La formule contient cependant une approximation de l'âge de l'assuré. En effet, la date d'échance ne peut correspondre à la date anniversaire de la naissance de l'assuré. On fait ici l'hypothèse de répartition uniforme des décès dans l'année.

Dans la suite, le prix de l'actif sera modélisé par un mouvement brownien géométrique, solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique. Le coût de la garantie s'exprime alors dans le modèle de Black-Scholes sous la forme :

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^F}\left[e^{-rT_x}[K - S_{T_x}]^+ \mathbb{1}_{T_x \leq T}\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_x q_{x+t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rt}[K - S_t]^+\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_x q_{x+t-1} \left[K e^{-rt}\phi(-d_2(t)) - S_0\phi(-d_1(t))\right] \end{aligned}$$

où

$$d_1(t) = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

, $d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{t}$, ϕ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Sur le plan financier (risque de mortalité mutualisé), garantir le flux $max(K, S_{i+1}) = S_{i+1} + [K - S_{i+1}]^+$ pour un décès entre les dates i et $i+1$, $i < T$, suppose pour l'assureur de détenir à la date de souscription, ce jusqu'à la date de décès de l'assuré, l'actif support du contrat en UC, et de vendre un Put sur cet actif. Il court par contre le risque qu'à l'échéance des contrats, la valeur des actifs supports soit très inférieure à celle des primes investies par le souscripteur. On va s'intéresser maintenant à la couverture mise en place par l'assureur pour ce type de contrat.

3 Comparaison de la situation de référence à la situation de réallocation sous conditions

Cette section est librement inspirée du support de cours. Lorsque la garantie est valorisée via la formules des Puts moyens pondérés en probabilité risque neutre, deux facteurs génèrent mécaniquement des imperfections de couverture et des besoins de réajustement. Ce sont :

- La mutualisation imparfaite des décès
- L'impossibilité matérielle de réajuster la position en continu

Pour évaluer le coût de ces imperfections, on introduit des coûts de transaction proportionnels aux volumes échangés. On pourra ainsi évaluer :

- Le coût de l'erreur de couverture lié au caractère discret des réallocations (impossibilité matérielle de réajuster la position en continu).
- Le coût des transactions associées à ma couverture.

Le prix de la garantie à la date 0 pour un assuré d'âge x est donné par :

$$V = \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1}p_x q_{x+n-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K - S_n]^+\right]$$

On considère la couverture du Put dont on reconnaît le payoff :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F}\left[e^{-rn}[K-S_n]^+\right]$$

À la date 0, le vendeur de la garantie se constitue un portefeuille à partir de la prime qu'il a reçue. Dès la première date de cotation de l'actif risqué S, il rajoute à son portefeuille une certaine quantité de cet actif, et d'un zéro-coupon d'échéance T. À chaque intervalle de temps de longueur $\delta_N = \frac{T}{N}$, N entier, il vend ou il achète une certaine quantité d'actif risqué et d'actif sans risque. Son objectif est qu'à la date d'exercice (qui n'est pas forcément la date d'échéance de la garantie plancher, puisque le souscripteur peut décéder avant), le portefeuille ainsi constitué lui permette de livrer la garantie sans prendre de risque. Une façon de juger de la qualité de la couverture serait donc par exemple d'évaluer à l'aide d'une mesure appropriée l'écart entre la valeur du portefeuille de titre et de zéro-coupon et le payoff de l'option.

On note

$$(\alpha_{t_i}, \beta_{t_i})_{1\leq i\leq N}$$

la stratégie de couverture de la garantie consistant à répliquer le flux $[K-S_n]^+$, $n \leq T$. α_{t_i} est le montant investi dans l'actif risqué à chaque date de cotation $t_i = \frac{iT}{N}$, $i = 0, \ldots, N$ et β_{t_i} est le montant investi dans l'actif sans risque.

Le portefeuille du vendeur de la garantie à la date 0 a pour valeur :

$$W_0 = -P(S_0, T, K, r, \sigma)$$

où $P(S_0, T, K, r, \sigma)$ est le prix de Black-Scholes d'un Put européen de sous-jacent S, d'échéance T et de prix d'exercice K.

À chaque date intermédiaire $0 < t^- \leq T$, le portefeuille doit être réajusté de sorte que l'on ait :

$$W_t = -P(S_t, t, K, r, \sigma) + \alpha_t S_t + \beta_t$$

Pour que ce portefeuille soit sans risque, il faudrait que toute variation du cours de l'actif sous-jacent n'induise aucune variation de valeur du portefeuille, que la variation relative de valeur du portefeuille pour une petite variation du cours de l'actif risqué soit nulle. Ceci se traduit mathématiquement en posant :

$$\frac{\partial W_t}{\partial S_t} = 0$$

Ceci implique que :

$$-\frac{\partial P(S_t, t, K, r, \sigma)}{\partial S_t} + \alpha_t = 0$$

Par suite, le montant investi dans l'actif sans risque à chaque nouvelle date de cotation n'est autre que le *Delta* du Put, sa variation relative de valeur entre cette nouvelle date de cotation et la précédente, soit :

$$\alpha_t = \phi(d_1(t)) - 1 = -\phi(-d_1(t))$$

où ϕ est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour avoir un portefeuille d'arbitrage, on impose en plus d'avoir une mise nulle à chaque date de cotation soit : $W_t = 0$. Et ainsi il vient :

$$\beta_t = P(S_t, t, K, r, \sigma) - \phi(-d_1(t))S_t$$

Pour être en arbitrage, on emprunte donc le montant β_t de cash au taux sans risque sur $[t, T]$. Ce montant sert à financer la différence entre le prix coté de l'option et ce qu'on débourse pour investir dans l'actif sous-jacent. On suppose que des frais de transactions sont associés ces opérations. Ils sont supposés proportionnels aux montants investis dans les différents actifs. Ainsi, ils valent initialement :

$$c_0 = \gamma(\alpha_0 S_0 + \beta_0)$$

A chaque date $t_i \leq T$, on réajuste la position suivant la stratégie $(\alpha_{t_i}, \beta_{t_i})_{1\leq i\leq N}$, en ayant toujours comme contrainte que la valeur du portefeuille soit nulle, et qu'il ne varie pas avec le sous-jacent. La valeur du portefefeuille à la date t_{i-1} après réajustement est :

$$W_{t_{i-1}} = -P(S_{t_{i-1}}, t_{i-1}, K, r, \sigma) + \alpha_{t_{i-1}} S_{t_{i-1}} + \beta_{t_{i-1}} e^{rt_{i-1}} \tag{3.1}$$

En vue de réajuster les montants à la date de cotation t_i, il faut tenir compte de la contrainte d'autofinancement :

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = -(P(S_{t_i}, t_i, K, r, \sigma) - P(S_{t_{i-1}}, t_{i-1}, K, r, \sigma)) + \alpha_{t_{i-1}}(T)(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) + \beta_{t_{i-1}}(T)(e^{rt_i} - e^{rt_{i-1}}) \tag{3.2}$$

qui traduit que la variation de valeur du portefeuille est dûe uniquement à la variation de cours de l'actif risqué. On réalloue les richesses entre les deux actifs sans ajout ni retrait d'argent. On peut donc réécrire avec cette contrainte, combinant (3.1) et (3.2) la valeur du portefeuille à la date t_i^- juste après la cotation, avant le réajustement :

$$W_{t_i^-} = -P(S_{t_i}, t_i, K, r, \sigma) + \alpha_{i-1}(T) S_{t_i} + \beta_{i-1}(T) e^{rt_i}$$

Pour déterminer α_{t_i} et β_{t_i}, les montants à investir dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque à la prochaine date de cotation t_i, on utilise les conditions $\frac{\partial W_t}{\partial S_t} = 0$ (portefeuille sans risque) et $W_t = 0$ (portefeuille d'arbitrage). Le coût de transaction associé à ce réajustement est proportionnel aux montants échangés :

$$c_{t_i} = \gamma(|\alpha_{t_i} - \alpha_{t_{i-1}}| S_{t_i} + |\beta_i - \beta_{i-1}|)$$

Le coût du réajustement à la date t_i^- est noté $w_{t_i^-}$ et vaut :

$$w_{t_i^-} = (\alpha_{t_i} - \alpha_{t_{i-1}}) S_{t_i} + \beta_i - \beta_{i-1}$$

Remarque : Si on note $t_i = i\frac{T}{N} = i\delta_N$, $1 \leq i \leq N$, la valeur de l'actif est alors simulée à partir de la formule :

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(\delta_N) + \sigma\sqrt{\delta_N}\epsilon\right)$$

où ε est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette discrétisation de $(S_t)_{t\geq 0}$ est exacte car on a pour tout $t \geq 0$:

$$S_t = S_0 exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\right)$$

Ainsi

$$\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_i - t_{i-1}) + \sigma(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)$$

La propriété de stationnarité des accroissements du mouvement brownien standard permet enfin de dire :

$$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim B_{t_i - t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \delta_N) \sim \sqrt{\delta_N}\varepsilon$$

où ε est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. L'actif doit être simulé sous la probabilité historique, la gestion du portefeuille étant faite dans le monde réel.

Question : Gestion optimale de la couverture

La stratégie que nous avons décrite effectue une correction des montants $(\alpha_{t_i}, \beta_{t_i})$ même si la position est sur-couverte, c'est à dire lorsque :

$$W_{t_i^-} = -P(S_{t_i}, t_i, K, r, \sigma) + \alpha_{t_{i-1}} S_{t_i} + \beta_{t_{i-1}} e^{rt_i} > 0$$

On va considérer la méthode de gestion de la couverture consistant à ne pas réajuster la position quand elle est favorable, c'est à dire à garder en portefeuille :

$$\alpha_{t_i} = \alpha_{t_{i-1}}$$

et

$$\beta_{t_i} = \beta_{t_{i-1}}$$

lorsque $W_{t_i^-} > 0$, et on va comparer son coût à la situation de référence.

3.1 Mise en oeuvre

Pour comparer les deux situations nous avons utilisé `Matlab` :

- Dans le fichier `couverture_garantie _plancher.m`, on réalise la couverture d'une garantie plancher en pésence de coûts de transaction, avec une réallocation constante.
- Dans le fichier `couverture_garantie_plancher_0reajust.m`, on réalise la couverture d'une garantie plancher en pésence de coûts de transaction, avec une réallocation uniquement quand la position est défavorable.

Ce sont ces deux fichiers qu'il faut exécuter pour produire les résultats. Une invite de commande se présentera dans la fenêtre principale `Matlab` (fenêtre de commande), on pourra alors entrer les paramètres à la main et obtenir les résultats dans la même fenêtre. Ces deux programmes principaux sont liés à des programmes annexes (tout mettre dans le même dossier) :

- `prix_bs_put.m` : Calcul du prix de Black-Scholes d'un Put européen.
- `delta_put.m` : Calcul du delta de Black-Scholes d'un Put européen.
- `fctn_rep_norm.m` : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- `partie_positive.m` : Partie positive d'un réel.
- `hist_erreur.R` : Tracé d'un histogramme à partir d'un fichier de données en entrée (typiquement un fichier d'erreurs de couverture produit par l'un des 2 programmes principaux)

, qu'il n'est pas nécessaire de modifier.

Les résultats de simulations que nous avons obtenus en sortie du programme sont consignés dans :

- `Résultats_situation_autre.xls`
- `Résultats_situation_ref.xls`

Les valeurs considérées pour le taux sans risque sont :

$$r = 3\%, 4\%, 5\%$$

Les valeurs considérées pour la volatilité de l'actif sont :

$$\sigma = 0.1, 0.2, 0.3$$

Le coefficient appliqué au calcul des frais de transaction est de :

$$\gamma = 0.1\%$$

Pour évaluer l'erreur de couverture associée à chaque choix de r et de σ, on a réalisé à chaque choix (r, σ) 1000 simulations de trajectoires de l'actif avec $S_0 = 100$, et réalisé 1000 couvertures d'un Put sur cet actif de prix d'exercice $K = 100$.

Le portefeuille de couverture est actualisé à chaque date de cotation t_{i+1} selon la formule :

$$W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \alpha_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (W_{t_i} - \alpha_{t_i} S_{t_i}) r (t_{i+1} - t_i)$$

L'erreur de couverture est calculée de la façon suivante :

$$err = W_T - (c_T + w_T^-) - (K - S_T)^+$$

Pour chaque choix (r, σ), on a donc un échantillon de 1000 erreurs de couverture. On en calcule la moyenne et l'écart type estimé (sans biais). Nous présentons les résultats obtenus à la section suivante. On commence par se faire une idée générale de la distribution de l'erreur de couverture à l'aide d'un histogramme et d'un polygone des fréquences.

3.2 Résultats

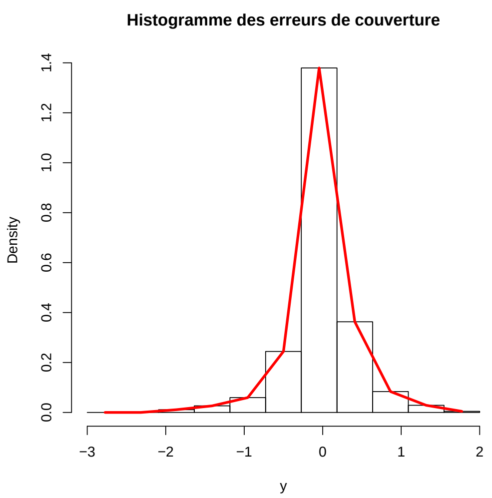

FIG. 1 – Histogramme de l'échantillon des erreurs de couverture, $r = 0.04$, $\sigma = 0.1$, situation de référence.

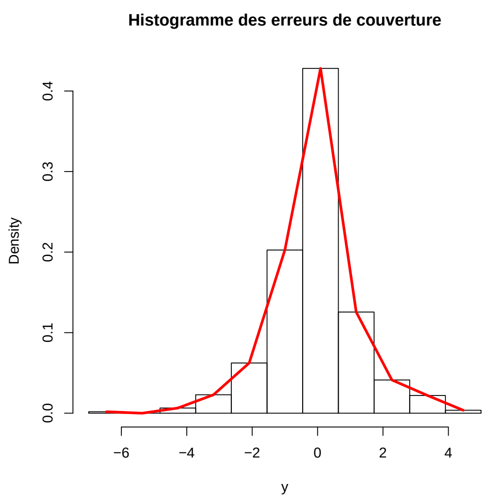

FIG. 2 – Histogramme de l'échantillon des erreurs de couverture, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, situation de référence.

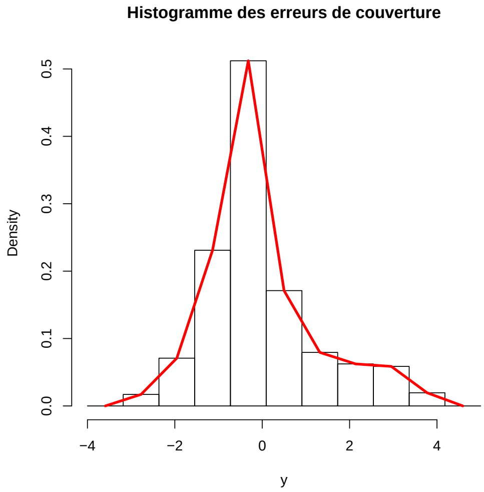

FIG. 3 – Histogramme de l'échantillon des erreurs de couverture, $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$, situation alternative.

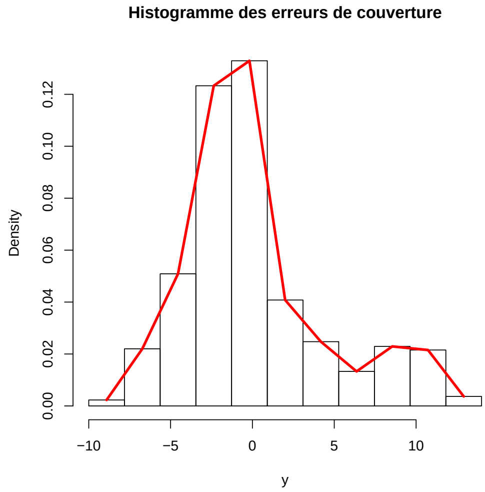

FIG. 4 – Histogramme de l'échantillon des erreurs de couverture, $r = 0.04$, $\sigma = 0.1$, situation alternative.

La hauteur des rectangles de l'histogramme est proportionelle à l'effectif de chaque classe. De manière générale, la plus grande fréquence d'erreurs de couvertures est constatée autour de 0. Vraisemblablement, la distribution de l'erreur est la loi normale (en toute rigueur il faudrait faire des qq-plots et des tests d'adéquation), bien que ce soit moins plausible dans la situation alternative (cas où $r = 0.04$ et $\sigma = 0.1$). On donne l'estimation des paramètres de la loi des erreurs ci dessous :

Erreur de couverture moyenne dans le cas de réallocations constantes

	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
$\sigma = 0.1$	-0.0210	0.0032	0.0108
$\sigma = 0.2$	-0.0357	-0.0409	-0.0525
$\sigma = 0.3$	0.0151	0.0046	-0.0846

Ecart-type de l'erreur de couverture, cas de réallocations constantes

	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
$\sigma = 0.1$	0.4206	0.4074	0.3864
$\sigma = 0.2$	0.8836	0.8581	0.8017
$\sigma = 0.3$	1.2629	1.2845	1.2911

Erreur de couverture moyenne, cas de réallocations en situation défavorable

	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
$\sigma = 0.1$	-0.0353	0.0500	-0.0030
$\sigma = 0.2$	0.0479	-0.0404	-0.0245
$\sigma = 0.3$	0.0903	0.0320	0.0957

Ecart-type de l'erreur de couverture, cas de réallocations en situation défavorable

	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
$\sigma = 0.1$	1.2708	1.2063	1.1149
$\sigma = 0.2$	2.8193	2.6986	2.6245
$\sigma = 0.3$	4.2381	4.3067	4.0406

Ratio des erreurs de couverture moyennes cas de référence/cas particulier

	$r = 3\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$
$\sigma = 0.1$	0.5949	0.0640	-3.6000
$\sigma = 0.2$	-0.7453	1.0123	2.1428
$\sigma = 0.3$	0.1672	0.1437	-0.8840

Au regard du tableau du ratio des erreurs de couverture moyennes cas de référence/cas particulier, on ne peut pas vraiment tirer de conclusion sur le fait que l'une ou l'autre des stratégies minimise l'erreur moyenne de couverture. Par contre l'écart type de l'erreur de couverture semble être une fonction croissante de la volatilité de l'actif, à taux sans risque fixe. De plus si l' écart type de l'erreur de couverture est considéré comme mesure de risque pertinente pour une stratégie, en présence de coûts de transaction, la situation alternative est visiblement plus risquée que la situation de référence. Par exemple dans le cas où $r = 3\%$ et $\sigma = 0.3$, l'écart type estimé de l'erreur de couverture est 3 fois plus grand dans la situation alternative que dans la situation de référence.

4 Prise en compte d'une mutualisation imparfaite des décès

Cette section est tirée du support de cours [Pla08]. Les formules obtenues reposent sur la mutualisation du risque de décès, et ne sont donc valables que dans le cas d'un portefeuille de taille importante. Lorsque la taille du portefeuille ne permet pas cette approximation, il convient d'intégrer dans la démarche une mesure du risque associé au caractère aléatoire de décès. On notera à ce stade que l'approche « financière » ne peut s'adapter directement à ce nouveau contexte, car une stratégie de couverture doit être déterminée a priori, ce qui n'est pas possible si la date de décès est aléatoire. On doit donc intégrer dans le raisonnement les réajustements réguliers de la couverture en fonction des décès observés. L'approche par simulation permet d'intégrer ces réajustements de manière simple, comme on le verra ci-dessous. Concrètement, cela implique que dans l'approche « financière », un montant de fonds propres doit être dédié au contrôle du risque d'inadéquation de la couverture et des réajustements que cette inadéquation implique.

Mise en oeuvre par simulation

On cherche ici à déterminer la distribution du coût à la charge de l'assureur par des techniques de simulation. On se place pour simplifier dans le cas d'un support unique modélisé par un mouvement brownien géométrique, ce qui conduit à simuler l'évolution du cours de l'actif risqué sous la probabilité historique par :

$$S_i^t = S_{t-\delta_N} exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(\delta_N) + \sigma\sqrt{\delta_N}\epsilon \right)$$

où $delta_N$ est le pas de discrétisation associé à la fréquence de réallocation, et $t = n\delta_N$ pour $n = 1, \ldots, N-1$. Le flux de prestation lors de la simulation (i, k) pour l'assuré j est :

$$F_{j,t}^{i,k} = \left[K - S_t^i\right]^+ \mathbb{1}_{\left\{T_{x(j)}^k = t\right\}}$$

On suppose dans un premier temps les décès parfaitement mutualisés. La quantité d'actif risqué détenue à la date t pour couvrir les options jusqu'au terme T est égale à :

$$a_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N^{-1}+1}^{N-1} \alpha_t(k\delta_N)_{k\delta_N} p_{x(j)} q_{x(j)+k\delta_N}$$

avec $\alpha_t(s)$ la part d'actif risqué nécessaire pour couvrir une option de vente d'échéance s à la date t. On a de même pour l'actif non risqué :

$$b_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N^{-1}+1}^{N-1} \beta_t(k\delta_N)_{k\delta_N} p_{x(j)} q_{x(j)+k\delta_N}$$

À chaque période, l'assureur supporte donc un coût de :

$$c_t = k(|a_t - a_{t-\delta_N}|S_{t\delta_N} + |b_t - b_{t-\delta_N}|) + S_{t\delta_N}(a_t - a_{t-\delta_N})S_{t\delta_N} + (b_t - b_{t-\delta_N}e^{r\delta_N})$$

qui est la somme des frais de transaction et de la charge de réallocation proprement dite. Le coût global en 0 pour l'ensemble des assurés, sur la période considérée, est donc la variable aléatoire :

$$\Lambda_i = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-rn\delta_N}(c^i_{n\delta_N} + \sum_{j \in J} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[F^{i,k}_{j,j\delta_N}\right])$$

avec $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[F^{i,k}_{j,j\delta_N}\right] = \left[K - S^i_t\right]^+ {}_t p_{x(j)} q_{x(j)+t}$.

De la sorte on construit aisément la distribution empirique de la valeur actuelle de la charge future, et son espérance est approchée par l'espérance empirique.

On peut généraliser cette démarche au cas où on ne suppose plus les décès parfaitement mutualisés. On convient pour cela qu'en t on calcule la couverture future comme si les décès futurs des survivants à la date t étaient parfaitement mutualisés ; on obtient alors la quantité suivante d'actif risqué à détenir :

$$a_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N^{-1}+1}^{N-1} \alpha_t(k\delta_N)_{k\delta_N - t} p_{x(j)} q_{x(j)+k\delta_N}$$

qui est maintenant aléatoire. De même pour b_t. La charge des sinistres actualisée est maintenant de la forme :

$$\Lambda_{i,k} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-rn\delta_N}(c^i_{n\delta_N} + \sum_{j \in J_{n\delta_N}} F^{i,k}_{j,j\delta_N})$$

Si formellement cette expression est très proche de la version précédente, elle en diffère sur 2 points importants :

- Le coefficient c^t_i est maintenant une variable aléatoire ;
- L'ensemble J_t est également aléatoire.

En simulation des réalisations de l'actif financier et de la mortalité, on peut ainsi construire différents indicateurs associés à la distribution de la charge actualisée : distribution empirique, espérance, variance, etc. Cette approche permet également de mesure l'importance des risques financier et d'assurance en utilisant l'équation de décomposition de la variance :

$$Var(\Lambda) = \mathbb{E}\left[Var(\Lambda|M)\right] + Var(\mathbb{E}\left[\Lambda|M\right])$$

On calcule les estimateurs empiriques :

$$\bar{\lambda_i} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{i,k}$$

et

$$\bar{\bar{\lambda}}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\bar{\lambda_i}$$

Les quantités ci-après sont des estimateurs sans biais et convergents de $\mathbb{E}\left[Var(\Lambda|M)\right]$ et $Var(\mathbb{E}\left[\Lambda|M\right])$:

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(\lambda_{i,k}-\bar{\lambda_i})^2$$

et

$$\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{\lambda_i}-\bar{\bar{\lambda}})^2$$

La limite pratique de cette approche est liée au volume des calculs à effectuer. Au surplus, on constate que le risque d'assurance associé à la mortalité est très faible par rapport au risque financier. Aussi, l'hypothèse simplificatrice de parfaite mutualisation des décès est-elle en pratique justifiée. Au surplus, dans un cas réel il faut pour effectuer les calculs ci-dessus être capable de déterminer les coefficients :

$$(\alpha_{t_i}, \beta_{t_i})_{1\leq i\leq N}$$

cela est possible dans le cas du modèle de Black et Scholes, mais rarement explicitement dans un modèle plus général.

5 Quantification du coût des imperfections

Le coût de transaction associé à ce réajustement est proportionnel aux montants échangés :

$$c_{t_i} = \gamma(|\alpha_{t_i} - \alpha_{t_{i-1}}|S_{t_i} + |\beta_i - \beta_{i-1}|)$$

Le coût du réajustement à la date t_i^- est noté $w_{t_i^-}$ et vaut :

$$w_{t_i^-} = (\alpha_{t_i} - \alpha_{t_{i-1}})S_{t_i} + \beta_i - \beta_{i-1}$$

Le montant à détenir à la date 0 pour pouvoir faire face aux coûts de réajustement et aux coûts de transaction à chaque date de cotation est donc :

$$\sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i}(c_{t_i} + w_{t_i^-})$$

Cette somme est à placer au taux sans risque en 0, avec comme échéances de paiement des intérêts les dates de transactions $t_i = i\frac{T}{N}$, $i = 1, \ldots, N$.

6 Conclusion

Dans ce document, nous avons étudié les garanties plancher en cas de décès sur des contrats en unités de compte. Il s'agissait dans un premier temps de comparer l'erreur de couverture de la garantie dans le cas où on réalloue les actifs à chaque date de cotation, à celle observée dans le cas où on réalloue uniquement en situation défavorable. On n'a pas vraiment pu tirer de conclusion sur le fait que l'une ou l'autre des stratégies minimise l'erreur moyenne de couverture. Par contre l'écart type de l'erreur de couverture est une fonction croissante de la volatilité de l'actif à taux sans risque fixe. De plus, en prenant l'écart type de l'erreur de couverture comme mesure de risque pour une stratégie, en présence de coûts de transaction, la situation alternative est plus risquée que la situation de référence. Nous avons ensuite examiné la situation où les décès ne se mutualisent pas. Les limites pratiques de l'approche présentée sont liées au volume des calculs à effectuer. Le risque d'assurance associé à la mortalité est très faible par rapport au risque financier. De plus l'hypothèse simplificatrice de parfaite mutualisation des décès est en pratique justifiée. Dans un cas réel il faut pour effectuer les calculs vus être capable de déterminer les montants à investir dans les différents actifs lors de la couverture. Cela est possible dans le cas du modèle de Black et Scholes, mais rarement explicitement dans un modèle plus général.

Références

[Pla08] F. Planchet, *Les garanties « plancher » sur les contrats en unités de compte*, Support de cours 2007-2008

[Merl00] Sylvain Merlus, Olivier Pequeux, *Les garanties plancher ds contrats d'assurance-vie en unités de compte : tarification et couverture*, Thèse d'actuariat ENSAE Octobre 2000

[Chen03] Xavier Chenut, Christophe Frantz, Jean-François Walhin, *Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee*